풀이

STEP I 2011, 문제 1

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP I 2011, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q1

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 이용하면 y에 대해 풀지 않고도 각 곡선의 기울기(gradient)를 구할 수 있다. 그다음부터는 각 소문항마다 만나는 점 (p, q)에서의 조건을 적기만 하면 된다. 즉, 그 점은 직선 위에 있고, 곡선 위에 있으며, 두 기울기 사이에 관계가 성립한다(접할 때는 기울기가 같고, 법선(normal)일 때는 기울기의 곱이 -1이다). 기울기 조건으로부터 p와 q 사이의 간단한 관계를 얻고, 이 관계를 나머지 두 방정식에 대입하면 p가 서로 다른 두 가지 방식으로 결정되는데, 이 둘은 일치해야 한다.

풀이

소문항 (i)

y를 x의 함수로 보고 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$을 x에 대해 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

$b \neq 0$이므로 이를 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{ay^2}{bx^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (방정식에 a/x와 b/y가 들어 있으므로, 곡선 위의 모든 점에서 x와 y는 모두 0이 아니다.)

기울기가 같다는 조건. 직선 $ax + by = 1$의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이다. 점 (p, q)에서 곡선의 기울기

는 $-\dfrac{aq^2}{bp^2}$이므로

$$-\frac{aq^2}{bp^2} = -\frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q^2}{p^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = p^2,$$

이다. 여기서 a/b를 약분했는데, $a \neq 0$이므로 이는 허용된다. 따라서 $p = \pm q$이다.

두 가지 경우. 점 (p, q)는 또한

$$ap + bq = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1.$$

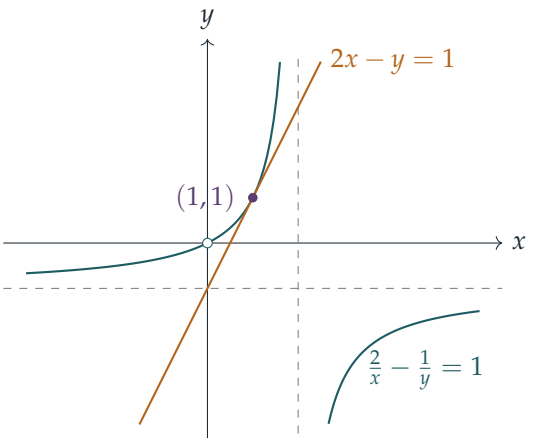
을 만족한다.

- $q = p$인 경우: 직선의 방정식에서 $p(a+b) = 1$이므로 $p = \dfrac{1}{a+b}$이다(특히 $a+b \neq 0$이다). 곡선의 방정식에서 $\dfrac{a+b}{p} = 1$이므로 $p = a+b$이다. 두 식을 비교하면 $a+b = \dfrac{1}{a+b}$, 즉 $(a+b)^2 = 1$이다.
- $q = -p$인 경우: 직선의 방정식에서 $p(a-b) = 1$이므로 $p = \dfrac{1}{a-b}$이다. 곡선의 방정식에서 $\dfrac{a-b}{p} = 1$이므로 $p = a-b$이다. 두 식을 비교하면 $(a-b)^2 = 1$이다.

따라서 $(a-b)^2 = 1$ 또는 $(a+b)^2 = 1$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 이런 점이 실제로 존재하는가, 아니면 필요조건(necessary condition)만 찾은 것인가?

실제로 존재한다. $a = 2, b = -1$로 두면 $a+b = 1$이다. 점 $(1,1)$은 직선 $2x - y = 1$ 위에 있고 곡선 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$ 위에도 있으며, 그 점에서 둘의 기울기는 모두 2이다. 이때 곡선은 $y = \dfrac{x}{2-x}$, 즉 원점이 제거된 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. 공통인 점에서 기울기가 같다는 것은 직선이 접선(tangent)이라는 뜻이다.



속이 빈 원은 원점을 나타내는데, 원점은 쌍곡선 $y = \frac{x}{2-x}$ 위에는 있지만 곡선 자체 위에는 있지 않다.

소문항 (ii)

$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 1$을 음함수 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay^2}{bx^2}.$$

직선이 점 (p, q)에서 곡선의 법선이라고 하자. 그러면 $p \neq 0, q \neq 0$이고

$$ap + bq = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 1.$$

이다. a, b, p, q가 모두 0이 아니므로, 접선의 기울기 $\frac{aq^2}{bp^2}$과 직선의 기울기 $-\frac{a}{b}$는 모두 유한하고 0이 아니다. 따라서 "법선"이라는 것은 두 기울기의 곱이 -1이라는 뜻이다.

$$\frac{aq^2}{bp^2} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a^2q^2 = b^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad aq = \pm bp.$$

? 생각해 보기 어느 부호가 가능한가?

각 부호를 곡선의 방정식에 넣어 확인해 보자.

- $aq = bp$이면 $\frac{b}{q} = \frac{a}{p}$이므로 $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 0 \neq 1$이다. 이 부호는 불가능하다.
- $aq = -bp$이면 $\frac{b}{q} = -\frac{a}{p}$이므로 곡선의 방정식은 $\frac{2a}{p} = 1$이 되고, 따라서 $p = 2a$이며, 이어서 $q = -\frac{bp}{a} = -2b$이다.

$p = 2a, q = -2b$를 직선의 방정식에 대입하면

$$2a^2 - 2b^2 = 1, \qquad \text{즉,} \qquad a^2 - b^2 = \tfrac{1}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 법선의 발은 점 $(2a, -2b)$이다.

검산

- 소문항 (i)에 대해, 위의 예 $a = 2, b = -1$은 $(a+b)^2 = 1$을 만족하고 직선은 점 $(1,1) = (p,p)$에서 접한다. 마찬가지로 $a = 2, b = 1$은 $(a-b)^2 = 1$을 만족하고, 직선 $2x + y = 1$은 점 $(1, -1)$에서 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$에 접한다.

- 소문항 (ii)에 대해, $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$이 되도록 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$로 두고 점 $(2a, -2b) = (\sqrt{3}, -1)$을 생각하자. 직선의 방정식에서 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$이고 곡선의 방정식에서 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이다. 그 점에서 접선의 기울기는 $\frac{aq^2}{bp^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$이고 직선의 기울기는 $-\sqrt{3} \approx -1.732$이며, 두 기울기의 곱은 -1이다.
- 수치적으로 확인해 보면, 기울기 공식은 수백 개의 무작위 점에서 유한차분(finite-difference)으로 구한 기울기와 일치하며, (a, b)에 대해 무작위로 탐색하면 $a^2 - b^2$이 반올림 오차 범위 안에서 0.5일 때에만 법선이 존재한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $q = -p$인 경우를 빠뜨리는 것. $(a - b)^2 = 1$을 주는 것이 바로 이 경우이다.
- 소문항 (ii)에서 곡선이 어느 부호를 허용하는지 확인하지 않고 $aq = \pm bp$에서 멈추는 것.

STEP 너머

음함수 미분은 음함수 정리(implicit function theorem)를 처음 엿보는 것이다. 음함수 정리에 따르면 $\partial F/\partial y \neq 0$인 점 근처에서 방정식 $F(x, y) = 0$은 y를 x의 미분가능한 함수로 정의하고, 이때 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$이다. 여기서 사용한 접선 논증에는 대수적인 쌍둥이도 있다. 직선이 원뿔곡선(conic)에 접하는 것은 둘의 교점을 구하는 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 때와 정확히 같으며, 이 방법으로 소문항 (i)을 다시 유도할 수 있다. 이 모든 것의 바탕이 되는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.