풀이

STEP III 2010, 문제 9

역학 • 원 위의 운동

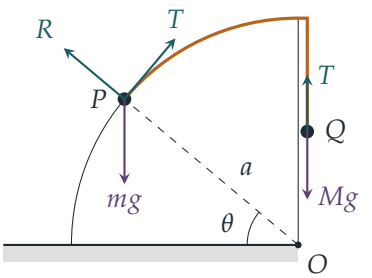
> **STEP III 2010, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q9

핵심 아이디어

줄이 늘어나지 않고(inextensible) 블록이 매끄러우므로(smooth), P와 Q는 항상 같은 속력으로 움직이며 계 전체의 에너지가 보존(conservation of energy)된다. 이로부터 미분방정식(differential equation)을 풀지 않고도 P의 속력을 θ의 함수(function)로 얻는다. 그다음 P는 원 위를 움직이므로, O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면 수직항력(normal reaction)을 구할 수 있다. 접촉을 유지한다는 것은 이 수직항력이 음이 되지 않는다는 뜻이고, 오목성(concavity)을 이용한 논증으로 블록의 꼭대기만 확인하면 충분함을 보인다.

풀이

모형. P와 Q는 입자이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 블록은 매끄러우므로 장력(tension) T는 줄 전체에서 같다. P가 호 위에서 각 θ인 위치에 있다고 하자. 줄은 P에서 호를 따라 블록의 꼭대기까지 이어진 다음, 연직면 옆을 따라 곧게 아래로 내려가 Q에 이른다.



속력. P가 $\theta = 0$에서 θ까지 움직였을 때 길이 $a\theta$인 호를 지나왔으므로, Q는 거리 $a\theta$만큼 내려왔다. 둘 다 속력 $v = a\dot{\theta}$로 움직인다. 한편 P는 높이 $a\sin\theta$만큼 올라갔다. 블록은 매끄럽고 줄은 (늘어나지 않으므로) 계에 대해 알짜 일을 하지 않으므로 에너지가 보존된다. 정지 상태에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

$M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$이므로 이 값은 $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$에서 양수이다. 따라서 계는 실제로 정지 상태에서 움직이기 시작한다.

수직항력. P는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 움직이므로, O를 향하는 가속도는 v^2/a이다. P에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- OP 방향으로 O에서 멀어지는 쪽을 향하는 수직항력 R;
- 접선 방향의 장력 T. 이 힘은 반지름 방향 성분이 없다;
- 무게 mg. OP가 수평과 각 θ를 이루므로 O를 향하는 성분은 $mg\sin\theta$이다.

O를 향하는 방향으로 분해하면

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

따라서

$$R = \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M}$$
$$= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}}.$$

생각해 보기 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 모든 θ에 대해 R은 음이 아니어야 한다. R의 최솟값을 찾아야 할까?

조건. P가 접촉을 유지하는 것은 전 구간에서 $R \geq 0$일 때, 즉

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{다음 범위에서: } 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

일 때와 정확히 같다. 최솟값은 필요 없다. 이 구간에서 $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$이므로 f는 오목(concave)하고, 따라서 그 그래프는 양 끝점을 잇는 현(chord) 위에 있거나 그보다 위에 있다. $f(0) = 0$이므로 다음이 성립한다.

- **필요성**(*necessity*). $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 P가 여전히 접촉하고 있다면 $f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$이다.

- **충분성**(*sufficiency*). $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$이면 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$까지의 현은 축 위에 있거나 그보다 위에 있다. 오목성에 의해 f는 현 위에 있거나 그보다 위에 있으므로, 구간 전체에서 $f \geq 0$이다.

따라서 조건은 $3m \geq (\pi - 1)M$, 즉

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. $(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$이므로 이 결과는 $m < M$과 모순되지 않는다.

검산

- $\theta = 0$에서 $R = 0$을 얻는다. 이는 옳다. 처음에 P는 블록의 밑동에 있고, 반지름 OP는 수평이며, P의 무게는 탁자가 떠받친다.
- P에 대해 접선 방향으로, Q에 대해 연직 방향으로 분해하면 $T = \dfrac{Mmg(1+\cos\theta)}{m+M} > 0$을 얻으므로, 줄은 실제로 내내 팽팽하다.
- 수치적으로 $m = 0.8$, $M = 1$, $a = 1$ (비율 $0.8 > 0.714$)로 두고 운동방정식(equation of motion)을 단계적으로 풀며 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로 R을 계산하면 공식과 10^{-13} 이내로 일치하고, R은 음이 되지 않는다. $m/M = \frac{2}{3}$이면 꼭대기 근처에서 R이 음수가 된다.

흔한 실수

- Q도 운동 에너지를 가진다는 것을 잊어서 $\frac{1}{2}(m+M)v^2$ 대신 $\frac{1}{2}mv^2$로 쓰는 것.
- 반지름 방향 방정식에 장력을 넣는 것. 매끄러운 면 위에서 줄은 P에서의 접선을 따라 놓인다.
- 왜 그것으로 충분한지 정당화하지 않고 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서만 $R \geq 0$을 확인하는 것. 그것으로 충분하게 만드는 것은 f의 오목성이다.

STEP 너머

여기서는 에너지 보존이 운동방정식 $(m+M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$를 푸는 일을 대신했다. 이것이 제1적분(first integral)이라는 아이디어이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 핵심이 된다. 줄은 구속 조건(constraint)이고, 좌표 하나 θ가 계 전체를 기술한다. 이 문제가 속한, 구슬이 구면에서 떨어져 나가는 유형의 문제들은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.