풀이

STEP III 2010, 문제 8

순수수학 • 몫의 미분법과 적분

STEP III 2010, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q8

핵심 아이디어

식 $QR' - Q'R$는 몫 R/Q를 미분(differentiate)할 때 얻어지는 분자이다. 따라서 주어진 P를 만들어 내는 R을 찾을 수만 있다면, P/Q^2 꼴의 피적분함수(integrand)는 보자마자 적분할 수 있다. 두 소문항 모두에서 분모가 Q를 알려 주고, R은 계수비교(comparing coefficients)로 찾는다. 소문항 (ii)에서는 미분방정식(differential equation)의 좌변이 정확히 $Qy' - Q'y$가 되는데, 이는 같은 구조가 모습을 바꾸어 나타난 것이다.

풀이

일반적인 적분

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2},$$

이므로

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

이다.

소문항 (i)

여기서 $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$이므로 $\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$이다. $\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$, $\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$로 두면

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

이다. (각 곱에서 나오는 x^3 항 $6cx^3$은 서로 소거된다.) 이것이 $5x^2 - 4x - 3$과 같아야 하므로

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

이다. 처음 두 식에서 $b = 2a - 3$, $c = 3a - 2$를 얻는다. 이를 세 번째 식에 대입하면

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

가 되어 a가 **어떤 값이든** 성립한다. 따라서 세 번째 식은 새로운 정보를 주지 않으며, 모든 a의 값이 조건을 만족한다.

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

$a = 1$로 택하면 가장 깔끔한 $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$를 얻고, 따라서

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

이다. 분모는 결코 0이 되지 않으므로(판별식(discriminant)이 $4 - 12 < 0$이다), 이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

유일하지 않음. 방금 본 것처럼 조건을 만족하는 R은 매개변수 하나로 이루어진 족(one-parameter family)을 이루므로, 선택은 유일하지 않다. 예를 들어 $a = 0$이면 $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$, $a = 1$이면 $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$이고, 둘 다 조건을 만족한다. 일반적인 a에 대한 선택과 $a = 0$에 대한 선택을 비교하면

$$(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2) - (-3x - 2x^2) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

이다.

? **생각해 보기** R에 Q의 상수배를 더해도 아무런 차이가 없는 이유는 무엇일까?

상수 k에 대하여 R을 $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$로 바꾸면

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

이므로 P는 변하지 않는다. 이에 대응하여 답 R/Q는 R/Q + k로 바뀐다. 즉 R을 다르게 택하면 상수만큼만 차이 나는 부정적분(antiderivative)을 얻게 되고, 그 상수는 임의의 적분상수(constant of integration)에 흡수된다. 예를 들어

$$\frac{1-x+x^2}{1+2x+3x^2} = \frac{-3x-2x^2}{1+2x+3x^2} + 1.$$

이다.

소문항 (ii)

$\mathrm{Q}(x) = 1+\cos x + 2\sin x$로 두자. 그러면 $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$이므로, 방정식에서 y의 계수 $\sin x - 2\cos x$는 정확히 $-\mathrm{Q}'(x)$이다. 따라서 방정식은

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

이다. $\mathrm{Q} \neq 0$인 구간에서 양변을 Q^2으로 나누면 좌변이 몫의 도함수임을 알 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5-3\cos x+4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

(다시 말해 $1/\mathrm{Q}^2$이 적분인자(integrating factor)이다.) 우변을 적분하기 위해 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$를 만족하는 R을 찾는다. Q의 꼴을 본떠 $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$로 시도하면 $\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$이다. 전개하면

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c-b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c-b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

이다. 빼면 $\sin x\cos x$ 항은 소거되고, 제곱 항들은 $(c-2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$로 합쳐진다. 따라서

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c-2b) + (c-2a)\cos x + (a-b)\sin x.$$

이다. 이를 $5 - 3\cos x + 4\sin x$와 비교하면

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

이다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $2a - 2b = 8$, 즉 세 번째 식이 다시 나오므로, 소문항 (i)과 같은 이유로 자유 매개변수가 하나 있다. $b = 0$으로 택하면 $c = 5$, $a = 4$이므로 $\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$이다. 따라서

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4+5\sin x}{1+\cos x+2\sin x} + C,$$

이고, 일반해(general solution)는

$$y = 4 + 5\sin x + C(1+\cos x+2\sin x),$$

이다. 여기서 C는 임의의 상수이다. 이 해를 구할 때 Q로 나누었지만, 직접 대입해 보면 이 함수는 모든 x에 대하여 방정식을 만족한다. b를 다르게 택하면 C만 이동할 뿐이다. 예를 들어 $b = -2$이면 $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$이다.

검산

- 소문항 (i)에서 피적분함수의 $\int_0^1$은 우리가 구한 부정적분으로부터 $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$이어야 한다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $-0.83333\ldots$이고, 임의의 구간에서도 모든 a의 선택에 대하여 값이 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $y = 4 + 5\sin x$를 대입하면 좌변은 $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$이다. 또한 $y = \mathrm{Q}$를 대입하면 $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$이므로, 이것이 여함수(complementary function)이다.
- 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(0.5) = 1.7$에서 $x = 1.5$까지 풀면 3.910638을 얻으며, 이는 대응하는 C를 넣은 공식의 값과 일치한다.

흔한 실수

- 미지수 세 개에 대한 방정식 세 개가 유일한 해를 가지리라고 기대하는 것. 여기서는 방정식들이 종속이며, 바로 그것이 유일하지 않음에 관한 질문의 핵심이다.
- 소문항 (ii)에서 Q′의 부호를 틀리는 것. $\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$이므로 y의 계수는 $+\mathrm{Q}'$가 아니라 $-\mathrm{Q}'$이다.
- 최종 답에서 적분상수가 Q에 곱해진다는 사실을 잊는 것. 일반해는 $y = \mathrm{R} + C$가 아니라 $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 방정식은 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이며, 일반해는 "특수해 더하기 동차방정식의 해의 상수배"라는 모양을 갖는다. 이는 모든 선형 문제에 공통으로 나타나는 패턴이다. 식 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$은 Q와 R의 론스키안(Wronskian)으로, 2계 선형 방정식에서, 특히 계수 내림법(reduction of order)과 매개변수 변환법(variation of parameters)에서 핵심적인 역할을 한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자와 론스키안을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.