풀이

STEP III 2010, 문제 7

순수수학 • 매클로린 급수

STEP III 2010, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q7

핵심 아이디어

다루기 불편한 제곱근을 정리해 두는 것이 모든 것을 풀어 주는 열쇠이다. $\sqrt{1-x^2}\,y'$를 하나의 깔끔한 식으로 쓰고 한 번 더 미분하면 2계 방정식이 자연스럽게 나온다. 그다음 미분을 거듭하면 계수(coefficient)에 규칙이 나타나고, 이를 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. 일반 관계식에 $x = 0$을 대입하면 매클로린(Maclaurin) 계수에 대한 점화식(recurrence)이 되고, m이 짝수이면 이 점화식에서 0인 인수가 나타나므로 급수가 끊긴다.

풀이

미분방정식

$\theta = \arcsin x$라 하면 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$에서 $\sin\theta = x$이고, $|x| < 1$에 대하여 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$이다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$이고 $y = \cos m\theta$이므로, 연쇄 법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{즉,} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

이 식을 x에 대하여 미분하되, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$(0이 아니다)를 곱하면

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2y = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서부터 $y^{(n)}$은 $\mathrm{d}^ny/\mathrm{d}x^n$을 뜻한다.)

3계 및 4계 방정식

방금 증명한 방정식을 미분한다. 곱 $(1-x^2)y''$에서는 $(1-x^2)y'''-2xy''$가, xy'에서는 $xy''+y'$가 나오므로

$$(1-x^2)\,y'''-3x\,y''+(m^2-1)\,y'=0.$$

같은 방법으로 한 번 더 미분하면

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-2x\,y'''-3x\,y'''-3y''+(m^2-1)\,y''=0,$$

이므로

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-5x\,y'''+(m^2-4)\,y''=0.$$

일반 관계식

x의 계수는 $1,3,5$로 나아가고 상수는 $m^2-0^2,\ m^2-1^2,\ m^2-2^2$로 나아가므로, 모든 정수 $n\geq 0$에 대하여

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0. \qquad (*)$$

이라고 추측할 수 있다. 이를 n에 대한 귀납법으로 증명한다. $n=0$인 경우는 처음에 증명한 방정식이다. 어떤 n에 대하여 $(*)$가 성립한다고 하자. 이를 미분하면

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)}-2x\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+2)}\\ -(2n+1)\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n+1)}=0.\end{aligned}$$

항을 정리하면 $x\,y^{(n+2)}$의 계수는 $-(2n+3)=-(2(n+1)+1)$이고, $y^{(n+1)}$의 계수는 $m^2-(n^2+2n+1)=m^2-(n+1)^2$이다. 따라서

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)}-(2(n+1)+1)x\,y^{(n+2)}+(m^2-(n+1)^2)y^{(n+1)}=0,$$

이고, 이는 $(*)$에서 n 대신 $n+1$을 넣은 것이다. 귀납법에 의하여 $(*)$는 모든 $n\geq 0$에 대하여 성립한다.

매클로린 급수

$x=0$에서 $\theta=0$이므로 $y(0)=\cos 0=1$이고 $y'(0)=-m\sin 0=0$이다. $(*)$에 $x=0$을 대입하면 가운데 항이 사라진다.

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

$y'(0)=0$이므로 홀수 계 도함수는 모두 0에서 값이 0이다. 짝수 계 도함수는

$$\begin{aligned}y''(0)&=(0-m^2)\cdot 1=-m^2,\\ y^{(4)}(0)&=(2^2-m^2)(-m^2)=m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0)&=(4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2)=-m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2),\end{aligned}$$

이고, 일반적으로 $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2)$이다. 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는

$$y = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!} + \cdots,$$

이고, o이 아닌 처음 세 항은 $1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$이다. ($m \neq 0, \pm 2$이면 이 항들은 모두 o이 아니다. 이 값들에 대해서는 다음 부분에서 설명하듯이 급수의 항이 더 적다.)

짝수 m

m을 짝수인 정수라 하고 $|m| = 2p$라 쓰자. 인수 $m^2-(2p)^2$은 o이며, $2k-2 \geq 2p$가 되자마자 이 인수가 $y^{(2k)}(0)$에 나타난다. 따라서 $|m|$보다 높은 계의 도함수는 모두 $x=0$에서 o이고, 매클로린 급수는 $x^{|m|}$ 항에서 끊긴다.

생각해 보기 $x=0$에서 끊기는 급수는 한 점에서의 도함수에 대한 정보만 알려 준다. y가 모든 $|x|<1$에서 이 다항식과 정말로 **같다는** 것을 어떻게 알 수 있을까?

이번에는 구간 전체에서 $(*)$를 다시 이용한다. $n = |m|$으로 잡아 $m^2 - n^2 = 0$이 되게 하고, $v = y^{(n+1)}$이라 하자. 그러면 $(*)$는

$$(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v = 0 \qquad (|x|<1).$$

이 된다. 이 1계 방정식의 적분인자(integrating factor)는 $(1-x^2)^{(2n-1)/2}$이다. 실제로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\Big] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\Big[(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v\Big] = 0,$$

이므로 $(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$는 $(-1,1)$에서 상수이다. $n+1$이 홀수이므로 $x=0$에서의 값은 $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$이다. 따라서 $v \equiv 0$, 즉 모든 $|x|<1$에 대하여 $y^{(|m|+1)}(x) = 0$이고, 그러므로 y는 차수가 $|m|$ 이하인 다항식(polynomial)이다. 다항식은 자기 자신의 매클로린 급수와 같으므로, $|x|<1$에 대하여

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \cdots,$$

이고, 우변은 위의 끊기는 급수이다.

이제 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$라 하고 $x = \sin\theta$라 두자. 그러면 $|x|<1$이고 $\arcsin(\sin\theta) = \theta$이므로(바로 여기서 θ에 대한 제한이 쓰인다)

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2\sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

이고, 이는 요구된 대로 시작하는 $\sin\theta$의 다항식이다.

마지막으로 $\sin^{|m|}\theta$의 계수는 $y^{(|m|)}(0)/|m|!$, 즉 $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(|m|-2)^2)/|m|!$이다. $2j \leq |m|-2$이면 $(2j)^2 < m^2$이므로 이 인수들은 어느 것도 o이 아니다. 따

라서 $m \neq 0$이면 이 다항식의 차수는 정확히 $|m|$이다(즉 m이 양의 짝수이면 차수는 m이다). $m = 0$이면 상수 1이다.

검산

- $m = 2$: 급수는 $1 - 2\sin^2\theta$이고, 이는 익숙한 $\cos 2\theta$이다.
- $m = 4$: 급수는 $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$이다. 직접 계산하면 $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$이다. 두 결과가 일치한다.
- 무작위로 고른 200개의 순서쌍 (m, x)에서 각 점을 중심으로 한 $\cos(m \arcsin x)$의 테일러 전개를 이용하여 $n = 0, \ldots, 8$에 대해 $(*)$를 수치적으로 확인하였고(가장 큰 상대 잔차는 약 10^{-13}), 12 이하의 모든 짝수 m에 대해 $\cos m\theta$와 다항식을 비교하였다. 예를 들어 $m = 6, \theta = 1$에서 양변은 모두 0.96017이다.

흔한 실수

- $(1 - x^2)y^{(n+2)}$를 미분할 때 곱의 미분법에서 나오는 $-2x\,y^{(n+2)}$ 항을 빠뜨리는 실수. 바로 이 항이 $2n + 1$을 $2n + 3$으로 바꾼다.
- 끊기는 매클로린 급수는 반드시 원래 함수와 같다고 가정하는 실수. 이 문제에서는 실제로 같지만, $v = y^{(|m|+1)}$을 이용한 논증(또는 다른 정당화)이 필요하다.
- 차수를 $m/2$로 답하는 실수. 이 다항식에는 $\sin\theta$의 짝수 거듭제곱만 있지만, 가장 높은 거듭제곱은 $\sin^m\theta$이다.

STEP 너머

대신 $x = \cos\phi$로 치환하면 같은 종류의 방정식이 체비쇼프(Chebyshev) 방정식 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$이 되며, 그 다항식 해 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$가 수치 근사에서 핵심적인 체비쇼프 다항식이다. 미분한 방정식에 $x = 0$을 대입하여 계수에 대한 점화식을 얻는 우리의 기법은 선형 상미분방정식(linear ODE)에 대한 **거듭제곱급수 방법**(*power series method*)의 출발점이다. 이 방법에서는 특별한 매개변수 값에서 급수가 끊기는 현상을 통해 르장드르(Legendre), 에르미트(Hermite), 체비쇼프 다항식이 모두 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 급수해를 명쾌하게 다루는 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.