풀이

STEP III 2010, 문제 6

순수수학 • 3차원에서의 회전

STEP III 2010, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q6

핵심 아이디어

축을 중심으로 하는 회전(rotation)은 축 위의 모든 점을 제자리에 두고, 축에 수직인 평면 위의 모든 것을 그 평면의 회전과 똑같이 돌린다. 따라서 각 단계는 2차원 회전으로 귀결된다. 돌아가는 평면을 찾고, 그 평면 안의 정규직교(orthonormal) 벡터 한 쌍을 적은 다음, 그 벡터들을 회전시키면 된다. 축 방향의 벡터는 그대로 남으며, 이 관찰 하나가 Q에 대한 계산의 상당 부분을 해결해 준다.

풀이

좌표축 방향의 단위벡터를 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$로 나타내자. 그러면 P_0, Q_0, R_0의 위치벡터는 각각 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$이다.

소문항 (i)

z축을 중심으로 회전하면 x-y 평면이 ϕ만큼 돌아가고, $\mathbf{i}$는 $\mathbf{j}$ 쪽으로 움직인다. 따라서

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

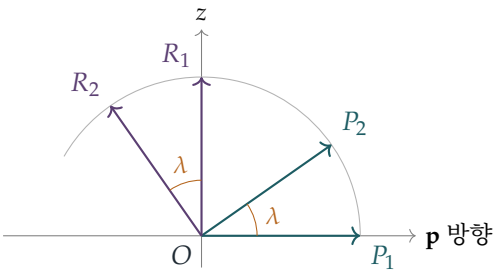
나중을 위해 적어 두면, 같은 회전은 $\mathbf{j}$를 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$으로 보낸다. 그 평면에서 Q는 P보다 항상 직각만큼 앞서 있기 때문이다. 또 R_0은 축 위에 있으므로 움직이지 않는다: $R_1 = (0, 0, 1)$.

소문항 (ii)

$\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$이라 하자. x-y 평면에서 OP_1에 수직인 직선의 방향은

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

이다. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = 0$이고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = 0$이기 때문이다. 이 축에 수직인 평면은 정규직교 쌍 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{k}$로 생성되는 평면이며, 두 번째 회전은 이 평면을 λ만큼 돌리고 $\mathbf{p}$는 $\mathbf{k}$ 쪽으로 움직인다.



그 평면에서 이 회전은 다음과 같이 보낸다.

$$\mathbf{p} \mapsto \cos\lambda\,\mathbf{p} + \sin\lambda\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \mapsto -\sin\lambda\,\mathbf{p} + \cos\lambda\,\mathbf{k},$$

두 번째 식은 $\mathbf{k}$가 $\mathbf{p}$보다 항상 직각만큼 앞서 있기 때문이다. 따라서

$$P_2 = (\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda), \qquad R_2 = (-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

생각해 보기 두 번째 회전에서 Q는 어디로 가는가?

첫 번째 회전 후 Q는 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$에 있는데, 이것은 정확히 $\mathbf{u}$이다. 즉 Q는 두 번째 회전의 축 위에 있으므로 움직이지 않는다. 따라서

$$Q_2 = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

검산으로, P_2, Q_2, R_2는 서로 수직인 단위벡터이다(예를 들어 $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2} = -\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi - \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi + \sin\lambda\cos\lambda = 0$). 회전을 거친 뒤이므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (iii)

이 소문항 전체에서 $P_2 \neq \pm P_0$이라고 가정하여, O, P_0, P_2가 실제로 하나의 평면을 결정하도록 한다.

생각해 보기 회전각이 왜 각 P_2OP_0과 같은가?

P는 평면 OP_0P_2 안에 머무르므로, 회전축은 O를 지나고 그 평면에 수직인 직선이어야 한다(회전은 한 점을, 그 점을 지나고 축에 수직인 평면 안에서 움직인다). 따라서 P는 이 평면 위의 대원(great circle)을 따라 움직이고, 이 평면 안의 모든 벡터는 회전각만큼 돌아간다. 그러므로 그 각은 $\overrightarrow{OP_2}$와 $\overrightarrow{OP_0}$ 사이의 각이며, 둘 다 단위벡터이므로

$$\cos\theta = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0} = (\cos\lambda\cos\phi)(1) + (\cos\lambda\sin\phi)(0) + (\sin\lambda)(0) = \cos\phi\cos\lambda,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. (반대쪽으로 길게 돌아 $2\pi-\theta$만큼 회전해도 코사인 값은 같다.)

축은 $\overrightarrow{OP_2}$와 $\overrightarrow{OP_0}$ 모두에 수직이므로, 두 벡터의 외적(cross product) 방향이다.

$$\overrightarrow{OP_2}\times\overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

따라서 축 방향의 벡터는

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

이다. 이 방향을 택하면, 오른손 법칙에 따라 θ만큼 회전할 때 P_2가 P_0으로 간다. 축에 x성분이 없다는 점에 주목하자. 축이 OP_0에 수직이므로 당연히 그래야 한다.

검산

- $\lambda = 0$이면 두 번째 회전은 아무 일도 하지 않으므로, 세 번째 회전은 첫 번째 회전을 되돌리기만 한다. 즉 $\theta = \phi$이고 축은 $(0, 0, -\sin\phi)$ 방향, 곧 z축이다. 공식과 일치한다.
- $\phi = 0$이면 회전은 y축을 중심으로 한 것뿐이었고, 실제로 축은 $(0, \sin\lambda, 0)$ 방향이며 $\theta = \lambda$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 20 000개의 (ϕ, λ)에 대해 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)으로 회전을 적용하면 P_2, Q_2, R_2가 그대로 재현되고, $(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$를 축으로 θ만큼 회전하면 P_2가 P_0으로 돌아온다. $\phi = 0.7, \lambda = 0.4$일 때 $\cos\theta \approx 0.7045$이므로 $\theta \approx 0.789$이다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서 Q를 회전시키는 실수: Q는 축 위에 있으므로 제자리에 머문다.
- R_2의 부호를 틀리는 실수: P가 $\mathbf{k}$ 쪽으로 기울어 올라가면 R은 OP_1에서 멀어지는 쪽으로 기울어 내려가므로, 수평 성분은 $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$이다.

STEP 너머

여기서 두 각은 경도 ϕ와 위도 λ이며, $\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$는 구면 코사인 법칙(spherical cosine rule)의 직각인 경우로, 항해에서 대원 거리를 구하는 데 쓰인다. 더 일반적으로, 두 회전의 합성은 다시 하나의 축을 중심으로 하는 회전이며(오일러(Euler)의 회전 정리), 열벡터 $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OQ_2}$, $\overrightarrow{OR_2}$는 합성 회전의 직교행렬(orthogonal matrix)을 이룬다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 회전행렬과 직교행렬을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 구의 회전을 복소수로 기술하는 방법을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.