풀이

STEP III 2010, 문제 5

순수수학 • 좌표기하의 작도

STEP III 2010, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q5

핵심 아이디어

여기서는 좌표(coordinates)가 모든 일을 해 준다. R와 S를 구하고, 직선 PQ와 RS를 절편 형태(intercept form)로 쓴 다음, 각 직선이 A를 지나고 AC에 수직인 직선과 어디에서 만나는지 살펴본다. 두 직선은 그 직선과 **같은** 점에서 만나며, 그 점은 T일 수밖에 없다. 작도는 한 가지 관찰에 기대고 있다. 주어진 정사각형의 대각선(diagonal)이 바로 우리가 필요로 하는 변이고, 첫 번째 부분이 눈금 없는 자(straight-edge)만으로 그 대각선에 직각을 그리는 방법을 알려 준다.

풀이

$TA \perp AC$임을 보이기

$C(a,a)$를 지나는 직선은 다루기 쉽다. 직선 CP는 (a,a)와 $(an,0)$을 잇므로, 기울기(gradient)는 $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$이고($n<1$이므로 정의된다) 방정식은 다음과 같다.

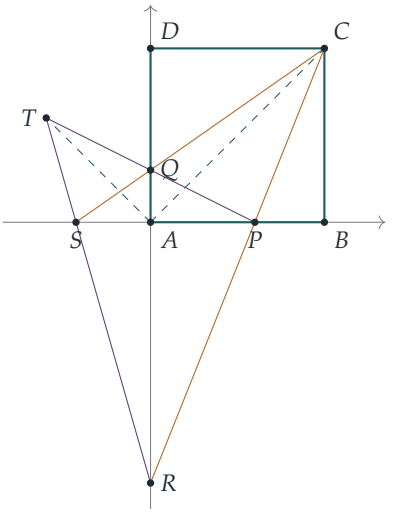
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

직선 DA는 $x=0$이므로

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

마찬가지로 CQ는 (a,a)와 $(0,am)$을 잇고, 기울기는 $1-m \neq 0$이며, 방정식은 $y = am + (1-m)x$이다. $y=0$(직선 BA)으로 놓으면

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



이제 절편 형태를 이용한다. 직선 PQ의 절편은 an과 am이고, 직선 RS의 절편은 $-\frac{am}{1-m}$과 $-\frac{an}{1-n}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

AC의 기울기가 1이므로, A를 지나고 AC에 수직(perpendicular)인 직선은 $y=-x$이다. 각 방정식에 $y=-x$를 대입하면

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a, \\ RS: &\quad x\left(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\right)=x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a. \end{aligned}$$

두 식은 같은 방정식이다. $m\neq n$이므로 괄호 안은 0이 아니고, 두 직선은 모두 $y=-x$와 다음 한 점에서 만난다.

$$\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right).$$

생각해 보기 PQ와 RS 위에 모두 놓인 점을 찾았다. 왜 이 점이 반드시 T여야 할까?

서로 다른 두 직선은 많아야 한 점에서 만난다. 직선 PQ와 RS는 서로 다르다(PQ는 x축 위의 $x>0$인 점 P를 지나지만, RS는 $x<0$인 점 S에서 x축과 만난다). 따라서 두 직선의 공통점은 모두 그 교점 T이다. 그러므로

$$T=\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right),$$

이고, 이 점은 $y = -x$ 위에 있다. 벡터(vector) $\overrightarrow{AT}$는 $(1, -1)$의 실수배이고 $\overrightarrow{AC} = (a, a)$이며, $(1, -1) \cdot (a, a) = 0$이다. 따라서 요구한 대로 TA는 AC에 수직이다.

풀이 과정에서 $m < n$은 전혀 쓰지 않았고, $m \neq n$만 썼다는 점에 주목하자. 또한 P와 Q의 실제 위치도 쓰지 않았으므로, $AP \neq AQ$이기만 하면 변 AB 위의 **임의의** 점 P와 변 AD 위의 임의의 점 Q에 대해 T는 A에서 AC에 그은 수선 위에 놓인다.

작도

넓이가 $2a^2$인 정사각형의 한 변은 $\sqrt{2}\,a$이고, 이는 대각선 AC의 길이이다. 따라서 AC를 한 변으로 하는 정사각형을 만든다. 좌표로 쓰면 이 정사각형의 꼭짓점은 다음과 같다.

$$A(0,0), \quad E(a,-a), \quad F(2a,0), \quad C(a,a).$$

변 $\overrightarrow{AE} = (a, -a)$, $\overrightarrow{EF} = (a, a)$, $\overrightarrow{FC} = (-a, a)$, $\overrightarrow{CA} = (-a, -a)$의 길이는 모두 $\sqrt{2}\,a$이고 이웃한 변끼리 수직이므로, 넓이는 $2a^2$이다.

> **생각해 보기** 눈금 없는 자로는 점을 잇고 직선을 연장하는 일밖에 할 수 없다. 도대체 어떻게 직각을 얻을 수 있을까?

첫 번째 부분이 바로 그런 방법이다. 그 안의 모든 단계는 알려진 두 점을 잇거나 두 직선의 교점을 구하는 것뿐이기 때문이다. 눈금 없는 자로 다음을 한다.

1. 대각선 AC를 긋는다. AB 위에 임의의 점 P를, AD 위에 임의의 점 Q를 잡되, A로부터의 거리가 눈에 띄게 다르도록 잡는다(측정은 필요 없다. $AP \neq AQ$이기만 하면 된다).
2. CP를 연장하여 직선 DA와 만나는 점을 R, CQ를 연장하여 직선 BA와 만나는 점을 S라 한다. PQ와 RS를 연장하여 만나는 점을 T라 한다.
3. 직선 TA를 긋는다. 앞의 결과에 의해 이 직선은 AC에 수직이다. CB를 B 너머로 연장하여 직선 TA와 만나는 점을 E라 한다. (직선 CB는 $x = a$이고 직선 TA는 $y = -x$이므로 $E = (a, -a)$이다.)
4. 반대쪽 꼭짓점 C에서 1–3단계를 반복한다. CD와 CB 위에 C로부터의 거리가 눈에 띄게 다른 점을 잡고 같은 작도를 한다. 정사각형의 중심에 대한 반회전(half-turn)은 A와 C를 서로 바꾸고 정사각형을 자기 자신으로 옮기므로, 이렇게 하면 C를 지나고 AC에 수직인 직선, 곧 $x + y = 2a$를 얻는다.
5. AB를 B 너머로 연장하여 이 직선과 만나는 점을 $F = (2a, 0)$이라 한다.

그러면 $AEFC$는 한 변이 $AC = \sqrt{2}\,a$인 정사각형이므로 넓이는 $2a^2$이다. (그 대각선 AF와 CE는 직선 AB와 CB 위에 놓이며, 새 정사각형의 중심인 B에서 만난다.)

검산

- $a = 1$, $m = 0.3$, $n = 0.6$으로 두자. 그러면 $R = (0, -1.5)$, $S = (-\frac{3}{7}, 0)$, $T = (-0.6, 0.6)$이다. 점 T는 R와 S를 지나는 직선 위에 있다: $-\frac{0.7}{0.3}(-0.6) - \frac{0.4}{0.6}(0.6) = 1.4 - 0.4 = 1$. 또한 PQ 위에도 있다: $-1 + 2 = 1$. 그리고 T는 $y = -x$ 위에 있다.
- 컴퓨터로 a, m, n을 무작위로 2000번 골라, $m < n$과 $m > n$ 두 경우 모두에 대해 분수를 써서 R, S, T를 정확히 계산했다. 모든 경우에 $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$이었고, 작도한 $AEFC$는 길이의 제곱이 $2a^2$인 네 변이 서로 직각으로 만나는 도형이었다.

흔한 실수

- PQ와 RS의 연립방정식을 무작정 푸는 것. 풀리기는 하지만 지저분하다. 후보 직선($y = -x$)을 두 방정식에 대입해 확인하는 편이 훨씬 빠르다.
- 공통점이 정말로 T인 이유를 설명하지 않는 것. 두 직선이 서로 다르다는 사실이 필요하다.
- 작도에서 방법을 밝히지 않고 "수선을 긋는다"거나 "길이를 옮긴다"고 쓰는 것. 모든 단계는 점을 잇거나 직선의 교점을 구하는 것이어야 한다.

STEP 너머

눈금 없는 자만 쓰는 작도는 **사영기하학**(projective geometry)에 속한다. 사영기하학에서는 잇기와 교점 구하기만이 허용되는 연산이며, R, S, T에 숨어 있는 것과 같은 비는 복비(cross-ratio)와 조화점열(harmonic range)을 통해 연구한다. 퐁슬레(Poncelet)와 슈타이너(Steiner)의 고전적인 정리에 따르면, 원 하나와 그 중심이 그려져 있기만 하면 눈금 없는 자 하나로 자와 컴퍼스로 할 수 있는 모든 작도를 할 수 있다. 이 문제에서는 정사각형이 그와 비슷한 역할을 한다. 콕서터(Coxeter)의 *Projective Geometry*(사영기하학)는 이 분야에 대한 아름다운 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.