풀이

STEP III 2010, 문제 4

순수수학 • 다항식의 공통근

> **STEP III 2010, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q4

핵심 아이디어

α가 최고차항 계수(leading coefficient)가 같은 두 이차방정식(quadratic)을 모두 만족하면, 두 식의 차도 만족한다. 이때 x^2 항이 소거되어 **일차**방정식(linear equation)이 남는다. 이것으로 α가 결정되고, 이를 한 이차방정식에 다시 대입하면 조건을 얻는다. 소문항 (ii)에서는 삼차식(cubic)을 이차식으로 나누면 같은 방법이 통한다. 이차식의 근에서는 삼차식이 그 나머지(remainder)와 정확히 같은 값을 가지므로, 다시 두 이차방정식의 문제로 돌아와 소문항 (i)의 결과를 그대로 쓸 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 "근(root)"은 복소수 범위의 근을 뜻한다. 따라서 모든 이차방정식은 (중복도(multiplicity)를 세어) 두 근을 가진다.

소문항 (i)

α가 두 방정식을 모두 만족한다고 하자. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

$a \neq c$이므로 양변을 $a-c$로 나눌 수 있고,

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

를 얻는다. 이것이 보이려던 것이다.

조건. $k = a - c \neq 0$, $m = b - d$로 놓으면 조건은 $m^2 - amk + bk^2 = 0$이다.

($\Rightarrow$) 공통근(common root)이 있으면, 앞의 결과에 의해 그 근은 $\alpha = -m/k$이다. 이를 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$에 대입하면

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

이고, 양변에 $k^2 \neq 0$을 곱하면 $m^2 - amk + bk^2 = 0$을 얻는다.

($\Leftarrow$) $m^2 - amk + bk^2 = 0$이라 하고, $\alpha = -m/k$로 **정의**하자. 조건을 k^2으로 나누고 위의 과정을 거꾸로 따라가면 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$임을 알 수 있다. 또한 α를 이렇게 골랐으므로 $(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$이다. 따라서

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - ((a-c)\alpha + (b-d)) = 0 - 0 = 0,$$

이므로 α는 공통근이다. 이로써 $a \neq c$일 때 동치임이 증명되었다.

? 생각해 보기 왜 정방향만으로는 충분하지 않을까?

정방향은 공통근이 존재한다면 조건이 성립한다는 것만 말해 준다. "필요충분조건(if and only if)"을 보이려면 조건으로부터 공통근이 생긴다는 것도 보여야 한다. 그래서 조건으로부터 α를 정의하고, 그것이 **두** 방정식을 모두 만족함을 확인한 것이다.

$a \neq c$를 없애면. $a = c$라 하자. 그러면 조건은 $(b-d)^2 = 0$, 즉 $b = d$가 된다.

- $b = d$이면 두 방정식은 똑같으므로 당연히 공통근을 가지며(두 근이 모두 공통근이다), 조건도 성립한다.
- $b \neq d$이면, 공통근 α가 있다고 할 때 두 식을 빼면 $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$이 되어 모순이다. 따라서 공통근이 없고, 조건도 성립하지 않는다.

두 경우 모두 "공통근이 있음"과 "조건이 성립함"이 일치하므로, $a \neq c$라는 조건이 없어도 **결과는 여전히 성립한다**.

(한 가지 미묘한 점은 실근만 세는 경우이다. $a = c, b = d, a^2 < 4b$이면 조건은 성립하지만 똑같은 두 방정식은 실근을 갖지 않는다. $a \neq c$일 때는 이런 문제가 없는데, 계수가 실수이면 공통근 $-(b-d)/(a-c)$는 저절로 실수이기 때문이다.)

소문항 (ii)

삼차식을 $x^2 + ax + b$로 나누자. $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$이므로

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

따라서 $x = \alpha$에서 $x^2 + ax + b = 0$이면, 그 점에서 삼차식의 값은 $(q-a-b)\alpha + (r-b)$이고, 다음 이차식

$$(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b) = x^2 + (q-b)x + r.$$

의 값도 마찬가지이다. 그러므로 α가 이차방정식과 삼차방정식의 공통근일 필요충분조건은 α가

$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{그리고} \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

의 공통근인 것이다. 이제 $c=q-b$, $d=r$로 놓고 소문항 (i)을 적용하자. 그러면 $a-c=a+b-q$, $b-d=b-r$이므로, 공통근이 존재할 필요충분조건은

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

이다. 소문항 (i)의 결과는 $a=c$인지 아닌지와 관계없이 성립하므로, 여기서 추가 조건은 필요 없다.

예제. 두 방정식을 2로 나누어 최고차항 계수가 1인(monic) 꼴로 만든다.

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

이들은 $a=\frac{5}{2}$(실제로 $a+1=\frac{7}{2}$이다), $q=\frac{5}{2}$, $r=\frac{1}{2}$인 요구된 꼴이다. 그러면 $a+b-q=b$, $b-r=b-\frac{1}{2}$이므로 조건은

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

이 된다. 양변에 4를 곱하면

$$\begin{aligned}(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3&=0\\ 4b^3-6b^2+b+1&=0.\end{aligned}$$

살펴보면 $b=1$이 근이고,

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

이차 인수에서 $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$를 얻는다. 따라서 두 방정식이 공통근을 가지는 것은 정확히

$$b=1 \qquad \text{또는} \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{또는} \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

일 때이다.

다른 방법. 여기서 삼차방정식에는 b가 들어 있지 않으므로 그냥 풀면 된다. $x=-\frac{1}{2}$를 넣어 보면 $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$이므로

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

이고, 근은 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$이다. 공통근 x가 있으면 $2b=-(2x^2+5x)$여야 한다. $x=-\frac{1}{2}$이면 $b=1$이다. 나머지 두 근에 대해서는 $x^2=-3x-1$이므로 $2x^2+5x=-x-2$이고 $b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$이다. 이는 위의 답과 일치한다.

검산

- $b = 1$일 때 이차식 $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$는 근 $-\frac{1}{2}$를 가지며, 이는 삼차방정식의 근이다.
- $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.8090$: 이차방정식의 근은 ≈ -0.3820과 -2.1180이고, $-0.3820 \approx \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$는 삼차방정식의 근이다.
- a, b, c, d(그리고 a, b, q, r)에 대해 무작위 정수 20 000가지를 컴퓨터로 시험한 결과, $a = c$인 경우를 포함하여 조건식이 0이 되는 것은 정확히 두 방정식이 복소수 근을 공유할 때였다.

흔한 실수

- "공통근 ⇒ 조건"만 증명하고 역(converse)을 잊는 것.
- $a = c$에 관한 질문에 "아니다, $a - c$로 나누었으니까"라고 답하는 것. 증명은 깨지지만 **결과**는 살아남는다. 양쪽 모두 $b = d$로 귀결되기 때문이다.
- 먼저 2로 나누지 않고 소문항 (ii)를 적용하는 것. 이 공식은 최고차항 계수가 1인 방정식에만 쓸 수 있다.

STEP 너머

소문항 (i)의 식은 두 이차식의 **종결식**(resultant)이다. 종결식은 계수들에 대한 다항식으로, 두 다항식이 근을 공유할 때 정확히 0이 된다. 종결식은 실베스터(Sylvester)의 행렬식(determinant)에서 나오며, 연립 다항방정식을 푸는 데 쓰이는 소거 이론(elimination theory)의 바탕이 된다. 소문항 (ii)의 "나누고 나머지를 남기는" 단계는 다항식에 대한 유클리드 호제법(Euclidean algorithm)의 첫 단계로, 정수에서와 똑같이 두 다항식의 최대공약수(highest common factor)를 찾아 준다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 맥락에서 다항식의 나눗셈과 최대공약수를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.