풀이

STEP III 2010, 문제 2

순수수학 • 정적분

> **STEP III 2010, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q2

핵심 아이디어

여기에 나오는 분모는 모두 (x 또는 x^2에 대한) 이차식이고, 그 근은 결국 $\pm e^a$와 $\pm e^{-a}$로 밝혀진다. 쌍곡함수(hyperbolic function) 계수를 지수함수로 써 보면 인수분해(factorisation)가 곧바로 드러난다. e^a와 e^{-a}는 곱이 1이고 합이 $2\cosh a$(또는 차가 $2\sinh a$)이기 때문이다. 그다음에는 부분분수(partial fractions)를 이용하면 모든 것이 로그나 아크탄젠트(arctangent)로 귀결되고, 남은 일은 답을 쌍곡함수 꼴로 깔끔하게 정리하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

정의에 따라

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right).$$

따라서 $2\cosh a = e^a + e^{-a}$이고 $e^a \cdot e^{-a} = 1$이므로

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^a)(x + e^{-a}).$$

$x \geq 0$이면 두 인수가 모두 양수이므로 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$에서 연속이다. $a > 0$이므로 두 근 $-e^a$와 $-e^{-a}$는 서로 다르고, 부분분수 분해는 다음과 같다.

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{e^a - e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right),$$

이는 다시 통분해 보면 확인할 수 있다. 분자가 $(x+e^a)-(x+e^{-a}) = e^a - e^{-a}$가 된다. 적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} &= \frac{1}{2\sinh a}\left[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a} - \ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).\end{aligned}$$

첫 번째 로그는 깔끔하게 정리된다. $1+e^a = e^a(e^{-a}+1)$이므로 $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}$이다. 두 번째 로그는 $\ln e^{-2a} = -2a$이다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}(-a+2a) = \frac{a}{2\sinh a},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

첫 번째 적분. 이번에는 계수가 $2\sinh a = e^a - e^{-a}$이고 상수항이 $-1 = e^a\cdot(-e^{-a})$이므로

$$x^2+2x\sinh a-1 = (x+e^a)(x-e^{-a}).$$

? **생각해 보기** 피적분함수는 구간 $[1,\infty)$ 전체에서 문제없이 정의되는가?

근은 $-e^a < 0$과 e^{-a}이고, $a>0$이므로 $e^{-a}<1$이다. 따라서 $x\geq 1$이면 두 인수가 모두 양수이고 피적분함수는 연속이다. x가 크면 피적분함수는 $1/x^2$처럼 행동하므로 이상적분(improper integral)은 수렴(converge)한다. 앞에서와 같이 부분분수로 분해하되, 이번에는 $e^a-(-e^{-a}) = 2\cosh a$를 쓴다.

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right).$$

1부터 X까지 적분하고 $X\to\infty$로 보내면

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a} - \ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

$X\to\infty$일 때 분수 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$이므로 첫 번째 로그는 0으로 수렴한다. 두 번째 로그는 분자에서 e^{-a}를 묶어 낸다.

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}\frac{e^a-1}{e^a+1} = e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

여기서 $\dfrac{e^a-1}{e^a+1} = \dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}} = \tanh\frac{a}{2}$를 이용했다(분자와 분모를 $e^{a/2}$로 나눈다). 따라서 두 번째 로그는 $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$이고,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a} = \frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

($0 < \tanh\frac{a}{2} < 1$이므로) 분자의 두 항은 모두 양수이며, 피적분함수가 양수이니 당연히 그래야 한다.

두 번째 적분. 이것은 소문항 (i)의 이차식에서 x를 x^2으로 바꾼 것이다.

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

두 인수는 모든 실수 x에 대해 양수이므로 피적분함수는 연속이고, 무한대에서 $O(1/x^4)$이므로 적분은 수렴한다. x^2을 변수로 보고 같은 부분분수 분해를 하면

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

각 항은 표준적인 아크탄젠트 적분이다. $c > 0$에 대해

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

각각 $c = e^{-a/2}$, $c = e^{a/2}$로 두면(각 항이 따로 수렴하므로 적분을 나누어도 된다)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

마지막으로 배각 공식(double-angle formula) $\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$를 쓰면 $\sinh\frac{a}{2}$가 약분된다.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

? **생각해 보기** $\cosh\frac{a}{2}$가 나오리라는 것을 미리 알아챌 방법이 있을까?

있다. 이 적분을 I라 하자. 치환(substitution) $x \mapsto 1/x$를 하면 $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$이기도 하므로

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

$u = x - 1/x$로 두면 $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$이고 $x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$이며, u는 $-\infty$부터 ∞까지 변한다. 분모는 $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$가 되므로 $2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$이고, 같은 답을 얻는다.

검산

- $a \to 0$이면 소문항 (i)은 $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$가 되고, $a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$이다. 마지막 적분은 $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$가 되어 $\pi/(4\cosh 0)$과 일치한다.
- 수치적으로 $a = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 소문항 (i)은 0.4254590641, (ii)의 첫 번째 적분은 0.5741556186, 두 번째 적분은 0.6965059227이 나오고, 이는 각각 $\frac{1}{2\sinh 1}$, $\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$, $\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 부분분수의 상수를 잘못 구하는 것. 이 상수는 $1/(\text{두 근의 차})$이며, 소문항 (i)에서는 $1/(2\sinh a)$이지만 (ii)의 첫 번째 적분에서는 $1/(2\cosh a)$이다.
- $e^{-a} < 1$임을, 즉 분모의 근이 $[1, \infty)$ 밖에 있음을 확인하지 않는 것.
- 답을 지수함수 꼴로 남겨 두는 것. 문제에서 쌍곡함수로 나타내라고 했으므로 $\frac{e^a-1}{e^a+1}$은 $\tanh\frac{a}{2}$로 바꿔야 한다.

STEP 너머

(ii)의 두 번째 적분은 대학에서는 보통 경로 적분(contour integration)으로 계산한다. 피적분함수는 $\pm ie^{\pm a/2}$에서 단순극(simple pole)을 가지며, 상반평면(upper half-plane)에 있는 유수(residue)를 더하면 몇 줄 만에 $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$를 얻는다. 같은 방법으로 $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$을 비롯해 실해석적 방법으로는 잘 풀리지 않는 많은 적분을 다룰 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 유수와 그것이 왜 통하는지를 기하학적으로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.