풀이

STEP III 2010, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포의 기댓값

STEP III 2010, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q12

핵심 아이디어

급수 S는 등차등비급수(arithmetico-geometric series)이며, rS를 빼는 기법을 쓰면 이것이 보통의 등비급수(geometric series)로 바뀐다. 이 결과를 얻고 나면, 문제에 나오는 모든 기댓값(expectation)이 정확히 이 꼴의 합이 된다. 사격 횟수는 일차적으로 늘어나는 반면, 그 횟수까지 갈 확률(probability)은 기하급수적으로 줄어든다. 따라서 문제 전체는 각 기댓값을 합으로 쓰고 알맞은 r과 d의 값을 읽어 내는 일로 귀결된다.

풀이

급수

$|r| < 1$이므로 급수는 절대수렴(converges absolutely)한다(각 항이 상수 곱하기 $n|r|^n$으로 위로 유계이다). 따라서 항별로 뺄 수 있다. r의 같은 거듭제곱끼리 줄을 맞추면

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \quad\quad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

이고, $n \geq 1$인 r^n의 각 계수는 정확히 d만큼 차이가 난다. 그러므로

$$(1-r)S = 1 + d\left(r + r^2 + r^3 + \cdots\right) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

이다. 여기서 등비급수를 합했는데, $|r| < 1$이므로 이는 타당하다. $1 - r \neq 0$으로 나누면

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

아서 혼자일 때

$0 < a \leq 1$이라고 가정한다($a = 0$이면 아서(Arthur)는 결코 명중시키지 못한다). 아서가 필요로 하는 사격 횟수를 N이라 하자. $N = n$인 것은 처음 $n-1$번의 사격이 빗나가고 n번째에 명중할 때와 정확히 같으므로, 독립성(independence)에 의해

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots).$$

괄호 안은 $r = a'$, $d = 1$인 S이고(a'^n의 계수가 $1+n$이다), $0 \leq a' < 1$이므로

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a+a'}{a} = \frac{1}{a},$$

이다. 여기서 $1 - a' = a$를 쓰고, 이어서 $a + a' = 1$을 썼다. (이 공식은 $a = 1$일 때에도 1을 준다.)

시합: 누가 이기는가

이제부터 $0 < a < 1, 0 < b < 1$로 두어 $0 < a'b' < 1$이 되게 한다. $1, 3, 5, \ldots$번째 사격은 아서의 것이고 $2, 4, 6, \ldots$번째 사격은 보아디케아(Boadicea)의 것이다. 아서의 사격 한 번과 그에 이은 보아디케아의 사격 한 번을 묶어 **라운드**(round)라 부르자. 한 라운드가 아무도 명중시키지 못한 채 지나갈 확률은 $a'b'$이다.

아서가 $2k+1$번째 사격($k = 0, 1, 2, \ldots$)에서 이기는 것은 처음 k개의 라운드가 명중 없이 지나가고 그다음 아서가 명중시킬 때와 정확히 같다. 독립성에 의해 그 확률은 $(a'b')^k a$이고, 이 사건들은 서로 배반(disjoint)이므로

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1-a'b'}.$$

마찬가지로 보아디케아가 $2k+2$번째 사격에서 이기는 것은 k개의 라운드가 지나가고 아서가 빗나간 뒤 보아디케아가 명중시킬 때이며, 그 확률은 $(a'b')^k a'b$이다. 따라서

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1-a'b'} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}.$$

검산으로, $1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$이므로 $\alpha + \beta = 1$이다. 즉 시합은 확률 1로 끝난다.

시합: 기대 길이

시합의 사격 횟수를 T라 하자. 앞 부분에서, $T = 2k+1$일 확률은 $(a'b')^k a$이고 $T = 2k+2$일 확률은 $(a'b')^k a'b$이다. $q = a'b'$로 쓰면

$$\mathrm{E}(T) = a\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k + a'b\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k.$$

? **생각해 보기** 이 합들은 급수 S와 어떻게 들어맞는가?

첫 번째 합은 $1+3q+5q^2+\cdots$이고, 이는 $r=q$, $d=2$인 S이다. 두 번째 합은 $1+2q+3q^2+\cdots$의 두 배이고, 이는 $r=q$, $d=1$인 S이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k = \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k = 2\left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{2}{(1-q)^2}.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

이제 목표식과 비교한다. $\alpha = a/(1-q)$와 $\beta = a'b/(1-q)$를 쓰면

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \frac{1}{1-q} + \frac{a'}{1-q} = \frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

따라서 $a(1+q)+2a'b = (1+a')(1-q)$임을 보이면 된다. $1-q = a+a'b$를 쓰면

$$(1+a')(1-q) = (1+a')(a+a'b) = a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b = a+aa'(1-b)+2a'b = a+aa'-aa'b+2a'b.$$

두 식의 차(첫 번째 빼기 두 번째)는

$$a'^2b + a'b - 2a'b + aa'b = a'b\,(a'+a-1) = 0,$$

이다. $a+a' = 1$이기 때문이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $a = 1$이면 아서가 곧바로 명중시킨다. 이때 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mathrm{E}(T) = 1$이며, 이는 $\alpha/a + \beta/b$와 일치한다.

- $a = b = p$이면 $\alpha/p + \beta/p = (\alpha + \beta)/p = 1/p$이다. 이는 옳다. 이 경우 시합은 각각 확률 p로 명중하는 독립적인 사격의 나열일 뿐이고, 첫 부분에 의해 첫 명중까지는 평균 $1/p$번의 사격이 걸린다.
- $a = 0.3$, $b = 0.45$이면 $\alpha = 0.3/0.615 \approx 0.4878$, $\mathrm{E}(T) = 1.7/0.615 \approx 2.764$를 얻는다. 시합 200 000회를 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.486과 2.769였다.

흔한 실수

- 보아디케아는 아서가 방금 빗나갔을 때에만 이길 수 있다는 점을 잊고 $\beta = b/(1 - a'b')$라고 쓰는 실수. 빠진 인수 a'는 $\alpha + \beta \neq 1$이 되는 것으로 드러난다.
- 사격 횟수 대신 라운드 수를 세는 실수. 보아디케아가 $k + 1$번째 라운드에서 이기는 시합은 $k + 1$번이 아니라 $2k + 2$번의 사격으로 이루어진다.

STEP 너머

이와 같은 결과는 보통 첫 라운드에 대해 조건을 거는 방법("첫 단계 분석(first-step analysis)")으로 더 매끄럽게 증명한다. 첫 라운드에서 아무도 명중시키지 못하면 시합은 두 번의 사격 뒤에 처음부터 다시 시작되므로 $\mathrm{E}(T) = a \cdot 1 + a'b \cdot 2 + a'b'\big(2 + \mathrm{E}(T)\big)$이고, 이로부터 한 줄 만에 $\mathrm{E}(T) = (1 + a')/(1 - a'b')$를 얻는다. 첫 단계 분석은 마르코프 연쇄(Markov chain)의 기본 도구로, 수학과 1학년이나 2학년에서 배운다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수(generating function)와 이런 방식의 논증을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.