풀이

STEP III 2010, 문제 11

역학 • 마찰과 상대 운동

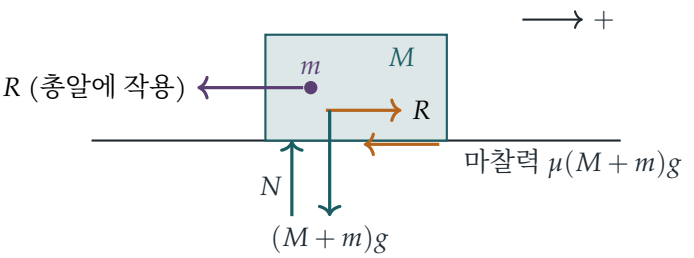
> **STEP III 2010, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q11

핵심 아이디어

여기서는 운동량(momentum)이 보존되지 **않는다**. 지면의 마찰력(friction)이 처음부터 끝까지 나무토막에 작용하기 때문이다. 따라서 익숙한 "총알이 나무토막에 박히는" 지름길은 쓸 수 없다. 대신 총알과 나무토막을 서로 다른 두 질점(particle)으로 보고, 각각 일정한 가속도(acceleration)를 가지며 크기가 같고 방향이 반대인 저항력 R로 연결되어 있다고 생각한다. 가속도가 일정하므로 *suvat* 공식(suvat equations)만으로 모든 계산을 할 수 있고, 상대 운동(relative motion)은 두 운동의 차일 뿐이다.

풀이

총알과 나무토막을 수평선 위를 움직이는 질점으로 모형화하고, 총알이 날아가는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 총알이 나무토막 안에 있는 동안 나무토막은 총알을 힘 R로 뒤로 밀고, 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 총알은 나무토막을 힘 R로 앞으로 민다.



수직항력. 연직 방향으로는 아무것도 가속되지 않는다. 총알은 나무토막이 떠받치고 있으므로 지면이 둘의 무게를 모두 떠받친다. 따라서 수직항력(normal reaction)은 $N = (M + m)g$이다.

마찰력. 문제에서 $R > (M+m)\mu g$라고 주어졌으므로, 나무토막에 작용하는 앞쪽 방향의 힘 R는 가능한 최대 마찰력 $\mu N = (M+m)\mu g$보다 크다. 그러므로 나무토막은 실제로 미끄러지며, 일단 움직이기 시작하면 마찰력은 한계값 $\mu(M+m)g$를 가지고 뒤쪽으로 작용한다.

소문항 (i)

총알에 작용하는 수평 방향의 힘은 뒤쪽으로 향하는 R뿐이므로, 총알은 R/m의 크기로 감속한다. 나무토막에 작용하는 알짜힘은 앞쪽으로 $R-(M+m)\mu g$이므로, 나무토막은 앞쪽으로

$$A = \frac{R-(M+m)\mu g}{M} > 0.$$

의 가속도로 가속한다. 나무토막에 대한 총알의 상대 가속도는 $-\frac{R}{m} - A$이므로, 나무토막에 대한 총알의 감속도(deceleration)의 크기는

$$a = \frac{R}{m} + \frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

나무토막에 대해 총알은 속력 u로 출발하여 a의 크기로 균일하게 감속하므로, 시간

$$t_1 = \frac{u}{a}.$$

가 지난 뒤 나무토막에 대해 정지한다. 이 순간 나무토막의 속력은 공통 속력 v이다. 나무토막은 정지 상태에서 일정한 가속도 A로 출발했으므로

$$v = At_1 = \frac{Au}{a}, \qquad \text{즉,} \qquad av = Au = \frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

생각해 보기 왜 그냥 운동량 보존을 이용해 v를 구하지 않을까?

총알–나무토막 계의 운동량은 외부에서 수평 방향의 힘이 작용하지 않을 때에만 보존된다. 여기서는 지면의 마찰력이 시간 t_1 동안 내내 나무토막에 작용하여 운동량 $(M+m)\mu g\, t_1$을 빼앗아 간다. (실제 총알에서는 이 시간이 매우 짧아 $v \approx mu/(M+m)$이지만, 문제는 정확한 값을 요구한다.)

소문항 (iii)

시간 t_1 동안 나무토막은 정지 상태에서 속력 v까지 균일하게 가속하므로, 이동 거리는 평균 속력에 시간을 곱한 것이다.

$$s_1 = \frac{0+v}{2}\, t_1 = \frac{uv}{2a}.$$

소문항 (iv)

총알이 나무토막 안에서 더 이상 움직이지 않게 되면, 둘은 질량 $M+m$인 하나의 물체로서 함께 움직인다. 무게는 여전히 $(M+m)g$이므로 마찰력은 뒤쪽으로 $\mu(M+m)g$이고 감속도는 μg이다. 속력 v에서 출발하여 정지할 때까지

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

만큼 더 미끄러진다(그 뒤에는 정지 마찰력(static friction)을 이겨 낼 수평 방향의 힘이 남아 있지 않으므로 정지한 채로 있다). 전체 이동 거리는

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}(\mu g + A),$$

이다. 여기서 v의 한 인수에 소문항 (ii)의 $v = Au/a$를 대입하였다.

? **생각해 보기** 어떻게 하면 a와 A를 없애고 깔끔한 답에 이를 수 있을까?

둘 다 분모 mM으로 통분하고 공통인수를 찾아본다.

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

따라서 인수 $R - m\mu g$가 약분되어 $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$이다($R > (M+m)\mu g > m\mu g$이므로 이 인수는 양수이다). 그러므로 나무토막이 움직인 전체 거리는

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$R < (M+m)\mu g$인 경우

이번에는 나무토막을 앞으로 미는 힘 R가 한계 마찰력(limiting friction) $(M+m)\mu g$보다 작으므로, 정지 마찰력이 나무토막을 제자리에 붙잡아 둘 수 있다. 즉 나무토막은 전혀 움직이지 않는다. 총알은 정지해 있는 나무토막 안에서 R/m의 크기로 감속하다가 거리 $\dfrac{mu^2}{2R}$만큼 파고든 뒤 멈추고(나무토막이 충분히 두껍다고 가정한다), 나무토막은 내내 그 자리에 머문다.

검산

- $m = 0.02\,\mathrm{kg}$, $M = 2\,\mathrm{kg}$, $u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\mu = 0.5$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R = 1000\,\mathrm{N}$로 놓자. 그러면 $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$, $s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$이고

$s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$이므로 $muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$와 일치한다. 두 질점의 운동을 단계별로 수치 모의실험해도 같은 v와 전체 거리를 얻는다.

- $R \to \infty$일 때(순간적인 충돌), $v = Au/a \to mu/(M+m)$이 되어 운동량 보존으로 얻는 답과 같아진다. 당연히 그래야 한다.
- 차원(dimensions): $muv/\big((M+m)\mu g\big)$의 차원은 (속력)^2/(가속도), 즉 길이이다.

흔한 실수

- 나무토막에 대해 $N = Mg$를 사용하여, 박혀 있는 총알의 무게도 지면이 떠받친다는 사실을 잊는 것.
- 충돌 과정에서 운동량이 보존된다고 보아 마찰력에 의한 충격량을 무시하는 것.
- R에서 마찰력을 뺀 값이 아니라 R 자체를 나무토막에 작용하는 알짜힘으로 보는 것.

STEP 너머

충격량(impulse)을 이용하면 전체 운동이 서로 맞아떨어지는지 빠르게 확인할 수 있다. 계는 결국 정지하므로, 나무토막이 움직이는 전체 시간 동안 지면의 마찰력이 주는 충격량은 총알의 처음 운동량 mu와 같아야 한다. 계를 여러 부분으로 나누고, 내력은 뉴턴의 제3법칙으로, 외력은 꼼꼼하게 추적하는 것은 대학 1학년 역학의 핵심 기술이며, 이는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)와 비탄성 충돌(inelastic collisions)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 성격의 문제를 많이 다루며 이 아이디어들을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.