풀이

STEP III 2010, 문제 10

역학 • 미소 진동

STEP III 2010, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q10

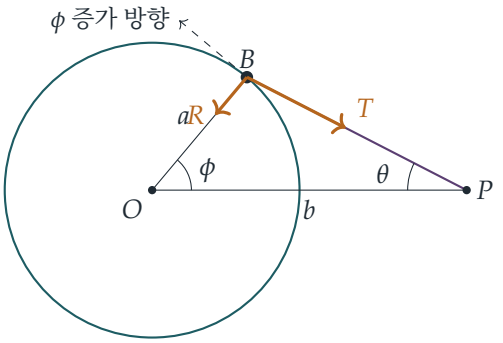
핵심 아이디어

구슬은 원 위에 묶여 있으므로, 고리의 접선 방향 힘 성분만이 구슬의 운동을 바꾼다. 수직항력(normal reaction)과 (고리의 연직 방향 항력이 상쇄하는) 중력은 전혀 관여하지 않는다. 나머지는 모두 삼각형 OBP의 기하이며, 사인법칙(sine rule)이 이 기하를 줄의 길이로 바꾸어 주고, 작은 각에 대해서는 두 번째 부분에서 요구하는 θ와 ϕ 사이의 선형 관계로 바꾸어 준다.

풀이

운동 방정식

구슬은 매끄러운 고리 위의 질점으로, 줄은 가볍고 탄성 있는 줄로 모형화한다. 그림과 같이 P를 양의 x축 위에 두고 ϕ를 시계 반대 방향으로 재어, B가 OP로부터 각 ϕ인 위치에 있도록 한다. 삼각형 OBP에서 O에서의 각은 ϕ, P에서의 각은 θ이므로 B에서의 각은 $\pi - \theta - \phi$이다.



$l = BP$라 하자. 삼각형 OBP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

이다. 여기서 $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$를 이용하였다. 특히 $l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$이다.

B가 P에 가장 가까워질 수 있는 거리는 $b-a$이고 $b-a > c$이므로, 줄은 항상 팽팽하다. 따라서 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

이다.

수평면에서 작용하는 힘은 BP 방향의 장력 T와, 반지름 OB 방향으로 작용하는 매끄러운 고리의 수직항력 R이다. (연직 방향으로는 무게가 항력의 연직 성분과 평형을 이룬다.) 구슬은 반지름 a인 원 위를 움직이므로, ϕ가 증가하는 방향의 접선 가속도는 $a\ddot{\phi}$이다. 접선 성분을 가지는 힘은 T뿐이다.

줄 BP는 안쪽을 향하는 반지름인 BO와 각 $\pi-\theta-\phi$를 이룬다. 따라서 바깥쪽을 향하는 반지름과는 각 $\theta+\phi$를 이루고, 접선 방향 성분의 크기는 $T\sin(\theta+\phi)$이다. 이 성분은 P 쪽, 즉 ϕ가 **감소하는** 방향을 향한다. 접선 방향으로 힘을 분해하면

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

이고, 이것이 구하는 식이다. ($\phi < 0$이면 그림을 OP에 대해 대칭이동한 것이 되며, 이때 $\theta < 0$이기도 하므로 부호를 가진 각으로 같은 방정식이 성립한다.)

미소 진동

사인법칙으로부터 $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$가 정확히 성립한다. θ와 ϕ가 작으면 양변에서 $\sin x \approx x$이므로

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

이다. 따라서 $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$이고 $\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$이다.

> ? **생각해 보기** 두 각이 모두 0으로 갈 때 $\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$는 어떻게 되는가? $0/0$ 꼴처럼 보인다.

이 몫은 그저 l/c이며, B가 평형 위치에 가까워지면 길이 l은 $b-a$로 수렴한다. 같은 말이지만, 위의 관계로부터 $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$이다. 그러므로 최저차까지 보면 장력은 일정한 평형 장력

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

이고, $c < b - a$이므로 이 값은 양수이다. 인수 $\sin(\theta + \phi)$가 이미 작으므로, T에 대한 보정은 이차 항에만 기여한다.

운동 방정식에 대입하고 일차 항만 남기면

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c} \cdot \frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

이다. 이것은 단진동(simple harmonic motion)이며, $\theta = \phi = 0$ 근처의 미소 진동의 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

이다.

검산

- 차원: λ는 힘이므로 $mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$의 차원은 $\mathrm{ML}/(\mathrm{MLT}^{-2}) = \mathrm{T}^2$이고, 이는 주기에 걸맞다.
- $c \to b - a$이면 평형 장력이 0이 되고 주기는 무한대가 된다. 느슨한 줄은 복원력을 주지 못하므로 타당하다.
- 수치적으로 $a = 1, b = 2.5, c = 0.7, \lambda = 3, m = 0.5$일 때 공식은 주기 1.8586을 준다. 작은 변위에서 출발하여 (힘을 B의 위치로부터 직접 계산하면서) 정확한 운동을 단계별로 계산하면 유효숫자 여섯 자리까지 같은 값이 나온다. 정확한 운동 방정식은 임의의 위치에서 직접 벡터로 분해한 결과와도 일치한다.

흔한 실수

- 부호를 틀리는 것: 접선 방향으로 당기는 힘은 P 쪽, 즉 $\phi = 0$ 쪽을 향하므로 반드시 음의 부호가 붙어야 한다.
- 평형 상태에서 장력을 0으로 놓는 것. 그곳에서 줄은 길이 $b - a > c$로 늘어나 있으므로 장력은 $\lambda(b-a-c)/c$이고, 바로 이 장력이 복원력을 제공한다.
- $\theta + \phi \approx \phi$를 쓰는 것. 여기서 θ는 ϕ와 같은 차수이므로, 이를 버리면 틀린 주기가 나온다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 미소 진동의 진동수를 구하는 표준적인 방법이다. 평형점을 찾고, 그 근처에서 운동 방정식을 선형화(linearise)한 뒤 ω^2를 읽어 낸다. 흥미로운 점은 복

원력이 전적으로 줄의 방향 변화를 통해 작용하는 **평형** 장력에서 나온다는 것인데, 이는 팽팽하게 당긴 기타 줄과 같은 원리이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)과 정규 모드(normal modes)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 미소 진동 해석이 신중하게 전개되는 것을 볼 수 있는 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.