풀이

STEP II 2010, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

STEP II 2010, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

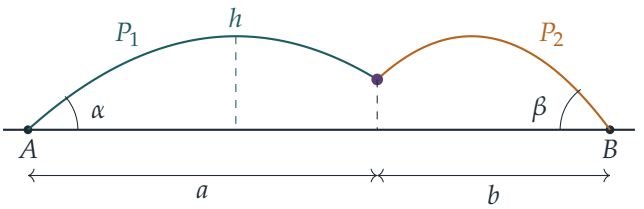
step.maths.org/questions/10-s2-q9

핵심 아이디어

같은 순간에 쏘아 올린 두 입자는 같은 가속도 g로 떨어지므로, 충돌하는 순간 두 입자의 높이가 같으려면 처음 연직 속도(vertical velocity)가 같아야만 한다. 그러면 두 입자의 연직 운동은 완전히 같다. 최고 높이(greatest height) h도 같고, 그 높이에 도달하는 시각도 같으며, 땅에 떨어지는 시각도 같다. 충돌은 최고점과 착지 사이에 일어나고, 각 입자가 이동한 수평 거리는 시간에 비례하므로 두 개의 간단한 경계 사이에 놓이게 된다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력 g만 받으며 자유롭게 움직이는 포물체(projectile)로 모형화한다. P_1의 속력을 u, P_2의 속력을 v라 하고, 발사 순간을 $t = 0$으로 잡으며, 충돌이 시각 $t_c > 0$에 일어난다고 하자.



같은 연직 운동

시각 t에서 P_1과 P_2의 높이는 다음과 같다.

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

충돌할 때 $y_1 = y_2$이므로 $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$이고, $t_c > 0$이므로

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

따라서 두 입자의 연직 운동은 완전히 같다. 특히 두 입자 모두 같은 최고 높이 h에, 같은 시각 T에 도달하며, 이때

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

이고, 두 입자 모두 시각 $2T$에 땅으로 돌아오게 된다.

생각해 보기 "공중에서"와 "P_1이 최고 높이에 도달한 뒤"라는 조건은 t_c에 대해 무엇을 알려 주는가?

P_1은 시각 T에 가장 높이 있으므로, "뒤"라는 조건에서 $t_c > T$이다. 두 입자는 $0 < t < 2T$일 때만 지면 위에 있으므로, 공중에서 충돌하려면 $t_c < 2T$여야 한다. 따라서

$$T < t_c < 2T.$$

b의 범위

수평 방향으로 P_2는 일정한 속력 $v\cos\beta$로 움직이므로 $b = v\cos\beta\,t_c$이다. 시각 T까지 이동했을 거리는

$$v\cos\beta\,T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

따라서

$$b = v\cos\beta\,T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

이고, $1 < t_c/T < 2$이며 (β가 예각이므로) $2h\cot\beta > 0$이므로

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

가 성립한다. 이것이 증명하려던 결과이다.

a의 범위

완전히 같은 방법으로 $a = u\cos\alpha\,t_c$이고

$$u\cos\alpha\,T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

이므로 $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$이며, $1 < t_c/T < 2$로부터

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

여기서는 같은 h를 쓴다. h는 정의에 따라 P_1의 최고 높이이고, 연직 운동이 같으므로 P_2의 최고 높이이기도 하다.

검산

- 경계의 경우: 정확히 최고점에서 충돌하면($t_c = T$) $a = 2h\cot\alpha$가 되는데, 이는 잘 알려진 사정거리(range)의 절반 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$이다. 착지하는 순간에 충돌하면($t_c = 2T$) $a = 4h\cot\alpha$, 즉 전체 사정거리 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$가 된다. 문제의 등호 없는 부등식(strict inequality)은 이 두 값 사이에 놓인다.
- 수치 확인: $g = 9.8$, $u = 20$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.9$ (라디안), $v = u\sin\alpha/\sin\beta$, $t_c = 1.5T$로 두면 $h \approx 8.470$, $a \approx 30.17$을 얻고, 이는 $2h\cot\alpha \approx 20.11$과 $4h\cot\alpha \approx 40.22$ 사이에 있다(실제로 정확히 1.5×20.11이다). 이런 방식으로 무작위 설정 20 000개를 시험했는데, P_1의 운동을 단계별로 계산하여 h를 확인하고 두 입자가 실제로 한 점에서 만나는지 점검했다.

흔한 실수

- 두 입자가 충돌 지점에 도달하는 시간을 서로 다르게 취급하는 것: 두 입자는 동시에 발사되므로 같은 t_c이다.
- 상한(upper bound)을 정당화하는 것을 잊는 것: 상한은 충돌이 공중에서, 즉 공통 착지 시각 $2T$ 이전에 일어난다는 사실에서 나온다.

STEP 너머

핵심 단계는 기준틀(frame)을 바꾸는 것이다. 가속도 g로 자유낙하하는 기준틀에서는 두 입자 모두 일정한 속도로 직선 운동을 하므로, 그 기준틀에서 서로를 겨냥하고 있었을 때만 충돌한다. 이것이 고전적인 "원숭이와 사냥꾼(monkey and hunter)" 아이디어이다. 가속하는 기준틀에서 생각하는 것, 그리고 가속도가 균일하지 않을 때 생기는 가상의 힘(fictitious force)은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동, 상대 운동(relative motion), 비관성 기준틀(non-inertial frame)을 좋은 문제들과 함께 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.