풀이

STEP II 2010, 문제 8

순수수학 • 곡선 사이의 넓이

> **STEP II 2010, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q8

핵심 아이디어

$\sin x \le 1$이므로 곡선 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$는 $y = \mathrm{e}^{-x}$보다 위로 올라갈 수 없다. 두 곡선은 정확히 $\sin x = 1$인 곳에서 만나며, 그곳에서 서로 접할 뿐이다. 따라서 각 넓이는 이웃한 두 접점 사이에서 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$를 적분한 하나의 적분이며, 부호가 바뀌는 것을 걱정할 필요가 없다. $\mathrm{e}^{-x}\sin x$의 적분은 전형적인 "부분적분(integration by parts)을 두 번 하는" 문제이고, 적분 구간의 끝점이 모두 $\sin x = 1, \cos x = 0$인 점이므로 그곳에서 원시함수(antiderivative)는 아주 간단한 꼴로 정리된다.

풀이

개형 그리기

C_1은 익숙한 감소하는 지수함수 곡선으로, $(0,1)$에서 시작하여 0을 향해 감소한다. C_2는 감쇠하는 사인파이다. 원점에서 시작하고, π의 모든 배수에서 값이 0이며, $-1 \le \sin x \le 1$이므로 $y = \mathrm{e}^{-x}$와 $y = -\mathrm{e}^{-x}$ 사이에 갇혀 있다. 진동은 매우 빠르게 줄어든다. 첫 번째로 음수가 되는 골짜기의 깊이부터 이미 약 0.014에 불과하다($x = \frac{5\pi}{4}$에서).

두 곡선은 어디에서 만나는가? $\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로

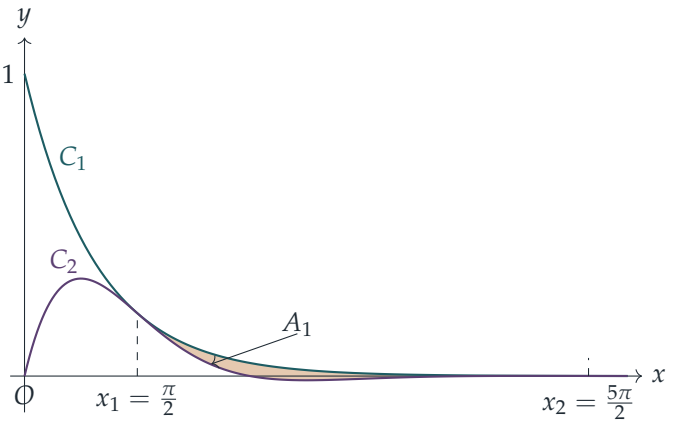
$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

이 점들에서 두 곡선은 교차하지 않고 접한다. 즉 C_2는 모든 곳에서 C_1 위에 있거나 그 아래에 있다. 실제로 이 점들에서는 기울기도 같은데,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}\sin x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{단, } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

이기 때문이다. C_2의 첫 번째 극댓값은 $x = \frac{\pi}{4}$($\cos x = \sin x$인 곳)에서 나타나며, 이는 첫

번째 접점 $x = \frac{\pi}{2}$보다 **앞선다**는 점에 주의하라. 따라서 개형에서는 C_2가 정점에 이른 뒤 내려와서 C_1과 접하도록 그려야 한다.



넓이 A_n

n번째 접점은 $x > 0$에서 $\sin x = 1$의 n번째 해이다.

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

x_n과 x_{n+1} 사이에서 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x) \geq 0$이므로 이 구간 전체에서 C_1이 위쪽 경계이고,

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

이다.

? 생각해 보기 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$는 어떻게 적분하는가?

부분적분을 두 번 하면 처음의 적분으로 되돌아온다. $I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$라 하자. $u = \sin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$로 부분적분하고, 다시 $u = \cos x$로 부분적분하면

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이므로 $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$이고 $I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$이다. (미분해 보면 확인할 수 있다.)

따라서 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$의 한 원시함수는

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

이다. 이제 깔끔한 부분이 나온다. 모든 접점에서 $\sin x = 1, \cos x = 0$이므로 그곳에서

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

이다. 그러므로 $x_{n+1} = x_n + 2\pi$를 이용하면

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1). \end{aligned}$$

마지막으로 $x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$이므로

$$A_n = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

무한합

이 식으로부터 $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$임을 알 수 있으므로, 넓이들은 첫째항이 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$이고 공비(common ratio)가 $r = \mathrm{e}^{-2\pi}$인 등비급수(geometric series)를 이룬다. $0 < r < 1$이므로 이 급수는 수렴(converge)하고,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

이다.

검산

- 합계는 x_1의 오른쪽에서 두 곡선 사이에 있는 넓이 전체이므로 $\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$와 같아야 한다. 실제로 그러하며, 급수를 쓸 필요도 없다.
- 수치로 보면 $A_1 \approx 0.10375$이고 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$이다. $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$이므로, 개형에서 짐작할 수 있듯이 넓이의 거의 전부가 첫 번째 영역에 있다. 구간 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$에서 $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 같은 값 0.103746을 얻는다.

흔한 실수

- 접점을 C_2가 극댓값을 갖는 점으로 잡는 것. 극댓값은 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$에서 나타나고, 두 곡선이 접하는 곳은 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다.

- $\sin x = \pm 1$의 해를 모두 세거나, $\sin x = 1$의 해가 π 간격으로 있다고 보는 것. 이웃한 접점 사이의 간격은 2π이다.
- $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$에서 부호를 틀리는 것. 답을 미분하여 확인하라.

STEP 너머

곡선 C_2는 감쇠 진동(damped oscillation), 즉 마찰이 있는 용수철의 운동 모양이며, 포락선(envelope) $\pm \mathrm{e}^{-x}$가 진동이 얼마나 빨리 사라지는지를 결정한다. $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 같은 적분은 $\int \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \, \mathrm{d}x$의 허수부로 보면 훨씬 빨리 계산할 수 있는데, 이는 대학 1학년 과정의 미분방정식(differential equation)과 라플라스 변환(Laplace transform)에서 늘 쓰이는 기법이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 감쇠 진동을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.