풀이

STEP II 2010, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식

> **STEP II 2010, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q7

핵심 아이디어

최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차식(cubic)의 그래프가 축과 정확히 한 번만 만나는 것은 두 극점(turning point)이 축의 같은 쪽에 있을 때이고, 그때뿐이다. 소문항 (ii)는 x^2 항이 없는 삼차방정식을 푸는 고전적인 방법이다. 치환(substitution) $x = u + q/u$는 x^3에서 생기는 교차항이 $-3qx$와 상쇄되도록 고른 것이며, 그 결과 u^3에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 남는다. 소문항 (iii)은 알고 보면 x 자리에 p가 들어간 같은 삼차방정식이다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$라 하자. 그러면 $f'(x) = 3x^2 - 3q$이고, 이는 $x = \pm\sqrt{q}$에서 0이 된다($q > 0$이므로 실수이다). $f''(x) = 6x$이므로 $x = -\sqrt{q}$인 점은 극대(local maximum)이고 $x = \sqrt{q}$인 점은 극소(local minimum)이다.

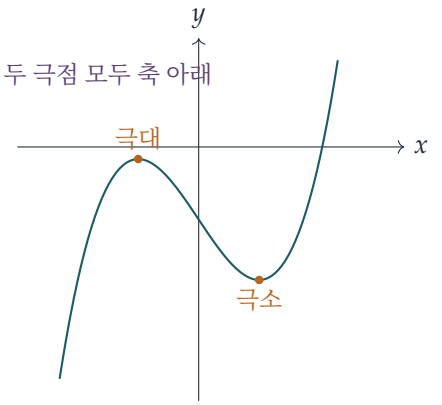
극대점에서

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q(q - 2\sqrt{q} + 1) \\ &= -q(\sqrt{q} - 1)^2. \end{aligned}$$

이다. $q > 0$이고 $q \neq 1$이므로($\sqrt{q} \neq 1$이므로) 이 값은 엄밀히 음수이다. 극솟값은 이보다 더 작다.

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

따라서 두 극점 모두 x축 아래에 있다. $x < \sqrt{q}$에서 곡선은 음수인 극댓값보다 위로 올라가지 않으므로 그 범위에서는 축과 만나지 않는다. $x > \sqrt{q}$에서 함수는 음수 값에서 $+\infty$까지 엄밀히 증가하므로 축과 정확히 한 번 만난다. 그러므로 곡선은 x축과 단 한 번만 만난다.



소문항 (ii)

이항정리(binomial theorem)로 $x = u + q/u$를 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$이고, 삼차방정식은 다음과 같이 된다.

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

양변에 u^3을 곱하면(치환이 의미를 가지려면 $u \neq 0$이어야 함에 주의한다) u^3이 만족하는 이차방정식은 다음과 같다.

$$(u^3)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

생각해 보기 이 이차식은 어떻게 인수분해되는가?

두 근의 합은 $q + q^2$, 곱은 $q^3 = q \cdot q^2$이어야 하므로 두 근은 q와 q^2이다.

$$(u^3 - q)(u^3 - q^2) = 0.$$

실수 세제곱근(cube root)을 취하면 $u = q^{1/3}$ 또는 $u = q^{2/3}$이다. 둘 다 같은 x를 준다.

$$q^{1/3} + \frac{q}{q^{1/3}} = q^{1/3} + q^{2/3}, \qquad q^{2/3} + \frac{q}{q^{2/3}} = q^{2/3} + q^{1/3}.$$

직접 확인해 보자. $s = q^{1/3}$, $x = s + s^2$이라 하면 $x^3 = s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$이고 $3qx = 3s^4 + 3s^5$이므로 $x^3 - 3qx = s^3 + s^6 = q(1+q)$이다. 소문항 (i)에 의해 $q > 0, q \neq 1$일 때 이 삼차방정식의 실근은 하나뿐이므로, 그 실근은

$$x = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

이다.

소문항 (iii)

$\alpha + \beta = p$이고 $\alpha\beta = q$이므로

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = p^3 - 3qp,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

한 근이 다른 근의 제곱이면 $\alpha^2 = \beta$ 또는 $\beta^2 = \alpha$이므로, 어느 경우든

$$(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha) = 0.$$

이다. 이 식은 α와 β에 대해 대칭(symmetric)이므로 p와 q로 나타낼 수 있다. 전개하면

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha) &= \alpha^2\beta^2 - (\alpha^3 + \beta^3) + \alpha\beta \\ &= q^2 - (p^3 - 3qp) + q.\end{aligned}$$

이다. 이를 0으로 놓으면 다음 관계식을 얻는다.

$$p^3 - 3qp - q(1+q) = 0.$$

이는 소문항 (ii)의 삼차방정식에서 x 자리에 p를 넣은 것과 정확히 같다. $q > 0, q \neq 1$이고 p가 실수이면 p는 이 방정식의 유일한 실근이어야 하므로

$$p = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

이다. 이는 타당하다. 이때 두 근은 $\alpha = q^{1/3}$과 $\beta = q^{2/3} = \alpha^2$이며, 그 합은 p이고 곱은 q이다.

검산

$q = 8$로 놓자. 소문항 (ii)에서 $x = 2 + 4 = 6$이고, 실제로 $216 - 144 - 72 = 0$이다. 소문항 (iii)에서 $p = 6$이면 $t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$이고 $4 = 2^2$이다. 컴퓨터로 수천 개의 임의의 q에 대해 (i)의 두 극값을, 임의의 복소수 u에 대해 항등식 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$을 확인했고, $p = q^{1/3} + q^{2/3}$이면 언제나 한 근이 다른 근의 제곱인 두 근이 나온다는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (i)에서 극솟값이 음수라는 것만 확인하는 것. 그것만으로는 축과 세 번 만날 수도 있다. 중요한 것은 극댓값이 음수라는 사실이며, $q \neq 1$이 쓰이는 곳도 바로 여기이다.
- (ii)에서 u^3의 두 값이 서로 다른 두 근을 줄까 봐 걱정하는 것. u와 q/u의 역할이 대칭이므로 두 값은 당연히 같은 x를 준다.

STEP 너머

(ii)의 치환은 일반 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano) 공식의 핵심이며, 수학에서 복소수(complex number)가 처음으로 피할 수 없게 된 곳이기도 하다. 삼차방정식이 세 실근을 가지면 u^3에 대한 이차방정식은 복소근을 갖는다. 제외된 경우인 $q = 1$이 좋은 예이다. 이 때는 $p = -1$도 가능하며, $t^2 + t + 1 = 0$의 근은 1의 복소 세제곱근(cube roots of unity)인 ω와 ω^2로, 각각 다른 하나의 제곱이다. 다항방정식이 언제 거듭제곱근(radical)으로 풀리는지에 대한 온전한 이야기는 갈루아 이론(Galois theory)이며, Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에 잘 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.