풀이

STEP II 2010, 문제 6

순수수학 • 정사면체의 기하

STEP II 2010, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

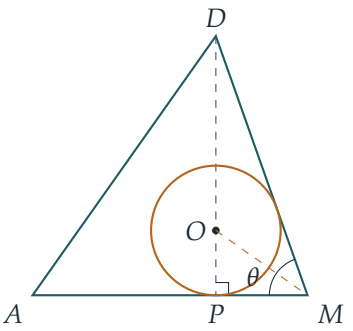
step.maths.org/questions/10-s2-q6

핵심 아이디어

정사면체(regular tetrahedron)는 대칭성이 매우 커서 거의 모든 일이 하나의 수직 단면(cross-section), 즉 한 모서리의 중점, 그 맞은편 꼭짓점, 그리고 꼭대기 꼭짓점을 지나는 평면에서 일어난다. 이 평면에서는 모든 3차원 문제가 직각삼각형 문제가 된다. 구(sphere)에 대해서는 대칭성이 중심의 위치를 알려 주고, 소문항 (ii)의 각이 그 중심이 각 면에서 얼마나 떨어져 있는지를 알려 준다.

풀이

이 풀이 전체에서 M을 BC의 중점이라 하자. 모든 면은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로, 각 중선(median)(AM이나 DM 등)의 길이는 $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



소문항 (i)

D는 A, B, C에서 같은 거리에 있고 DP는 평면 ABC에 수직이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$이고, 마찬가지로 $PB = PC$이다. 따라서 P는 정삼각형 ABC의 외심(circumcentre)이며, 이는 동시에 무게중심(centroid)이기도 하다. 무게중심은 각 중선을 따라 3분의 2 지점에 있으므로

$$PA = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

이제 삼각형 DPA에서 P의 각이 직각이므로

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

소문항 (ii)

여섯 모서리는 모두 똑같이 보이므로(정사면체의 대칭변환으로 어떤 모서리든 다른 모서리로 옮길 수 있다), BC를 따라 만나는 두 면 ABC와 DBC 사이의 각 θ만 구하면 충분하다.

> **생각해 보기** 그림에서 어느 각이 실제로 두 면 사이의 각인가?

한 직선에서 만나는 두 평면 사이의 각(이면각, dihedral angle)은 각 평면에 하나씩 있으면서 같은 점에서 공통 직선에 수직인 두 직선을 이용해 잰다. 정삼각형 ABC에서 중선 AM은 BC에 수직이고, 정삼각형 DBC에서 중선 DM은 BC에 수직이다. 따라서 $\theta = \angle AMD$이고, P가 AM 위에서 A와 M 사이에 있으므로 $\theta = \angle PMD$이기도 하다.

삼각형 DPM은 P에서 직각이고, $PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, 빗변은 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 그러므로

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (검산으로, $PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$이므로 소문항 (i)과 일치한다.)

소문항 (iii)

가장 좋은 구. O를 DP 위에서 $OP = r$인 점이라 하고, O가 세 개의 기울어진 면에서도 거리 r만큼 떨어지도록 r을 정하자. 대칭성에 의해 면 DBC만 다루면 충분하다.

평면 AMD는 BC에 수직이므로(둘 다 BC에 수직인 AM과 DM을 포함한다), 면 DBC에 수직이고, 따라서 O에서 그 면에 내린 수선(perpendicular)은 이 단면 안에 있다. 즉 그것은 O에서 직선 MD에 내린 수선이다. O는 직선 MP에서 거리 OP, 직선 MD에서 거리 r만큼 떨어져 있고 이 둘이 같기를 원하므로, O는 M에서의 각 θ의 이등분선(bisector) 위에 있어야 한다. 따라서

$$r = PM \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

소문항 (ii)에서 $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$를 이용하면

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다(θ가 예각이므로 양수). 그러므로

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

중심이 O이고 반지름이 $\frac{\sqrt{6}}{12}$인 구는 네 면에 모두 접하며, O가 모든 면에서 적어도 r만큼 떨어진 내부의 점이므로 이 구는 사면체 안에 있다.

생각해 보기 어디에 놓든 이보다 큰 구가 들어갈 수 없다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

더 큰 것은 들어가지 않는다. 사면체 내부의 임의의 점 X를 잡고, 네 면까지의 거리를 d_1, d_2, d_3, d_4라 하자. X를 꼭짓점들과 이으면 사면체가 각 면을 밑면으로 하는 네 개의 각뿔로 나뉘고, 각 밑면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이다. 이들의 부피를 더하면

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4}\,(d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

그런데 $X = D$로 잡으면(세 거리는 0이고 하나는 PD이다) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,PD$임을 알 수 있다. 그러므로 모든 내부의 점에 대해

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

X를 중심으로 하는 반지름 ρ인 구가 안에 들어가려면 모든 $d_i \geq \rho$이어야 하므로 $4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$, 즉 $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$이다. 따라서 가장 큰 구의 반지름은

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4}\,PD,$$

이고, 등호는 네 거리가 모두 같을 때(O에서), 그리고 그때에만 성립한다.

검산

- 좌표: $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2/3})$로 두면 여섯 모서리의 길이가 모두 1이고, $PD \approx 0.8165$이다.
- 임의의 두 면의 바깥쪽 단위 법선벡터(unit normal)의 내적(dot product)은 $-\frac{1}{3}$이므로, $\cos\theta = \frac{1}{3}$(약 $70.5°$)임이 확인된다.

- 점 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$은 네 면 모두에서 거리 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$만큼 떨어져 있다. 무작위로 잡은 내부의 점들은 항상 거리의 합이 $0.8165\ldots$였고, 그 가장 작은 거리는 결코 0.2041을 넘지 않았다.
- 중심은 PD를 따라 4분의 1만큼 올라간 곳에 있다. 이는 정사면체의 내심(incentre)이 무게중심이고, 무게중심은 한 면에서 맞은편 꼭짓점까지 가는 길의 4분의 1 지점에 있다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- $\angle DAM$이나 $\angle DBA$를 두 면 사이의 각으로 쓰는 것. 두 직선은 모두 공통 모서리에 수직이어야 하며, DM과 AM이 바로 그런 직선이다.
- PA를 중선의 3분의 2가 아니라 절반으로 잡는 것.
- 네 면에 접하는 구를 찾고 나서, 다른 곳에 놓인 구가 왜 더 클 수 없는지를 설명하지 않는 것. 거리의 합에 관한 항등식이 이를 두 줄로 해결해 준다.

STEP 너머

면까지의 거리의 합이 일정하다는 사실은 정삼각형에 대한 비비아니 정리(Viviani's theorem)의 3차원 판이다. 이는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)에서 나오는데, 무게중심 좌표는 단체(simplex)의 임의의 점을 꼭짓점들의 가중평균으로 나타낸다. 각 $\arccos\frac{1}{3}$은 화학에도 나타난다. 메테인 분자에서 결합 사이의 각은 $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$인데, 이는 바로 이 정사면체의 두 꼭짓점이 중심에서 이루는 각이다. 이런 종류의 3차원 추론을 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 내적과 외적(cross product)을 이용한 벡터 접근법을 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.