풀이

STEP II 2010, 문제 5

순수수학 • 벡터의 각과 원뿔

> **STEP II 2010, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

핵심 아이디어

이 문제는 모두 한 가지 사실로 귀결된다. 방향(direction)이 $\mathbf{d}$인 직선과 벡터 $\mathbf{a}$ 사이의 각 θ는 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$를 만족한다. "같은 각으로 기울어져 있다"와 "각 α로 기울어져 있다"는 곧바로 $\mathbf{d}$의 성분에 대한 방정식이 된다. 마지막 부분에서는 주어진 데카르트 방정식(Cartesian equation)이 방금 구한 관계식과 같은 꼴이라는 점에 주목하자. O를 지나고 모두 한 고정된 직선과 같은 각을 이루는 직선들의 모임은 원뿔(cone)이다.

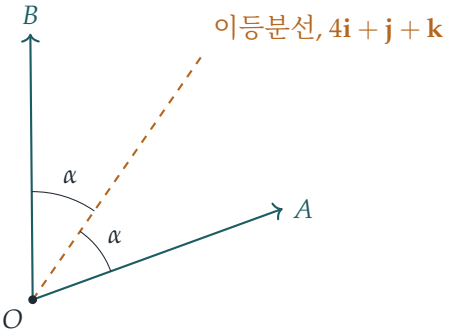
풀이

$\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$라 하면 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$이다. 또 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$이다. 따라서

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$\cos 2\alpha > 0$이므로 각 2α는 예각(acute angle)이고, 따라서 α는 0과 $\frac{\pi}{4}$ 사이에 있다. 앞으로 다음 값이 필요하다.

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



(그림은 평면 OAB를 개략적으로만 나타낸 것이다.)

소문항 (i)

$\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$를 L_1의 방향이라 하자. $\mathbf{d}$가 OA, OB와 이루는 각의 코사인은 각각

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{그리고} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

cos는 $[0,\pi]$에서 일대일(one-to-one)이므로, 각이 같다는 것은 코사인이 같다는 뜻이다. 양변에 $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$를 곱하면

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2(n+p).$$

? **생각해 보기** 직선에는 정해진 향이 없다. 직선이 OA와는 각 θ를, OB와는 각 $\pi-\theta$를 이룬다면 어떻게 될까?

"두 직선 사이의 각"을 예각 쪽으로 정한다면, 코사인은 부호를 무시하고 같기만 하면 된다. 반대 부호를 택하면 $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$, 즉 $4m+n+p=0$이다. 이 직선들은 O를 지나고 이등분선에 수직인 평면 위에 있으며, 이 평면은 $\angle AOB$의 외각의 이등분선(external bisector)을 포함한다. 문제가 의도한 답은 $m = 2(n+p)$이지만, 두 번째 직선족이 존재한다는 사실도 알아 둘 만하다.

$\angle AOB$의 이등분선(bisector)을 구하려면 OA와 OB 방향의 **단위벡터**(*unit vector*)를 더한다. 두 단위벡터는 마름모(rhombus)를 이루므로, 그 합은 두 벡터 사이의 각을 이등분한다. 따라서

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

이고 $m=4$, $n=1$, $p=1$(또는 이것의 0이 아닌 임의의 상수배)로 잡을 수 있다. 확인해 보면 $4 = 2(1+1)$이므로 이 방향은 위의 관계식을 만족한다.

소문항 (ii)

$\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$를 L_2의 방향이라 하자. 이 직선이 OA와 각 α를 이루는 것은

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

일 때이다. $\pm$는 직선 위의 두 향을 모두 허용하기 위한 것이다. 양변을 제곱하면 부호가 사라지고, $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$를 이용하면

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

좌변을 $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$로 전개하여 정리하면 다음 관계식을 얻는다.

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

생각해 보기 방향에 대한 조건이 어떻게 곡면이 될까?

$(x,y,z) \neq (0,0,0)$인 임의의 점을 잡자. 이 점은 O를 지나는 직선 중 정확히 하나, 즉 방향이 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$인 직선 위에 있다. 소문항 (ii)에 의해, 이 점이

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

를 만족하는 것은 O를 지나는 그 직선이 OA와 각 α를 이룰 때, 그리고 그때에만이다. 원점도 이 방정식을 만족한다. 따라서 이 곡면은 O를 지나고 직선 OA와 각 α로 기울어진 모든 직선의 합집합이다.

이것은 꼭짓점(vertex)이 원점이고 축(axis)이 직선 $x=y=z$(직선 OA)인 **(양쪽으로 뻗은) 직원뿔(right circular cone)**이다. 반꼭지각(semi-vertical angle) α는

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

를 만족하며, 이는 $\angle AOB$의 절반이다. μ가 모든 실수 값을 취하므로 이 원뿔은 두 갈래(nappe)를 가진다. 소문항 (i)의 이등분선은 이 원뿔 위에 있다. 실제로 $(4,1,1)$에 대해 $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$이다.

검산

- 점 $(1,1,0)$은 $2 = 2(0+0+1)$을 만족한다. 이 점이 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$와 이루는 각의 코사인은 $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$으로, 예상대로이다.
- 수치로 계산하면 $\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$이고, 이등분선 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$는 OA, OB 모두와 $0.61548\,\text{rad}$의 각을 이룬다.
- c를 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$와 이루는 각의 코사인이라 하면 항등식 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = (x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$이 성립한다. 따라서 좌변은 $c^2 = \frac{2}{3}$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다.

흔한 실수

- 단위벡터의 합 대신 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$로 이등분하는 것. $|\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}|$이므로 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$는 이등분선이 아니다.
- $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ 같은 식을 쓰는 것. 배각 공식(double-angle formula) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$가 필요하다.
- 꼭짓점, 축, 반꼭지각을 밝히지 않고 곡면을 그저 "원뿔"이라고만 서술하는 것.

STEP 너머

원뿔의 방정식은 M이 대칭행렬(symmetric matrix)일 때 $\mathbf{x}^{\mathsf{T}}M\mathbf{x} = 0$ 꼴의 **이차형식**(*quadratic form*)이다. 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)에서는 이러한 곡면을 M의 고윳값(eigenvalue)으로 분류한다. 여기서 M은 대각성분이 1이고 비대각성분이 -1이므로, 고윳값은 $-1(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 방향)과 2(중복도 2)이다. 음의 고윳값 하나와 서로 같은 양의 고윳값 둘은 바로, 홀로 다른 고윳값의 고유벡터(eigenvector)를 축으로 하는 원뿔의 부호수(signature)이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 다루는 부분에서 이 내용을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.