풀이

STEP II 2010, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2010, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $u = a - x$는 구간의 두 끝점을 맞바꾸고, $f(x)$를 $f(a-x)$로, 또 그 반대로 바꾼다. 따라서 이 적분은 분자가 분모의 나머지 절반인 "짝" 적분과 값이 같다. 두 적분을 더하면 분자가 분모와 같아져서 피적분함수(integrand)가 1이 된다. 문제의 나머지 부분은 이 구조가 모습을 바꾸어 숨어 있는 것을 알아차리는 것이다. 소문항 (ii)에서는 $[\frac{1}{2}, 2]$의 두 끝점을 맞바꾸는 치환 $x \mapsto 1/x$를 써서 같은 기법을 적용한다.

풀이

소문항 (i)

피적분함수가 정의되도록, 줄곧 $[0, a]$에서 $f(x) + f(a-x) \neq 0$이라고 가정한다. I에서 $u = a - x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이다. $x = 0$일 때 $u = a$이고, $x = a$일 때 $u = 0$이다. 따라서

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

u는 더미 변수(dummy variable)이므로 이름을 x로 바꿀 수 있고, 그러면 요구된 I의 두 번째 꼴을 얻는다.

이제 I에 대한 두 식을 더한다.

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{따라서} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

첫 번째 적분.

생각해 보기 $\ln(2+x-x^2)$ 속에서 $f(x)+f(a-x)$는 어디에 숨어 있는가?

이차식은 $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$로 인수분해된다. 따라서

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

이고, 두 인수가 모두 $[0,1]$에서 양수이므로 이 식은 성립한다. $a=1, f(x)=\ln(1+x)$로 두자. 그러면 $f(1-x)=\ln(2-x)$이고, 피적분함수는 정확히 $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$이다. $[0,1]$에서 $2+x-x^2\geq 2$이므로 분모는 결코 0이 되지 않는다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

두 번째 적분. 덧셈정리(compound-angle formula)로 분모를 전개한다.

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

따라서 피적분함수는 $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$이다. $a=\frac{\pi}{2}$, $f=\sin$으로 두면 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$이다. 분모 $\sin x+\cos x$는 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서 양수이다. 위의 결과에 의해

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

소문항 (ii)

이 적분을 J라 하자. 피적분함수는 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$이다. 분모는 안전하다. $x\in[\frac{1}{2},2]$이면 x와 $1/x$가 모두 $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$에 속하므로 $\sin x>0$이고 $\sin(1/x)>0$이다.

생각해 보기 어떤 치환이 $\sin x$와 $\sin\frac{1}{x}$를 맞바꾸면서 적분 구간의 끝 $\frac{1}{2}$와 2를 유지하는가?

답은 $x=1/u$이다. 그러면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$이다. $x=\frac{1}{2}$일 때 $u=2$이고, $x=2$일 때 $u=\frac{1}{2}$이다. 인수 $\frac{1}{x}$는 u가 되므로

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u(\sin u+\sin\frac{1}{u})}\,\mathrm{d}u.$$

u의 이름을 x로 바꾸고 이것을 원래 꼴의 J와 더하면

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

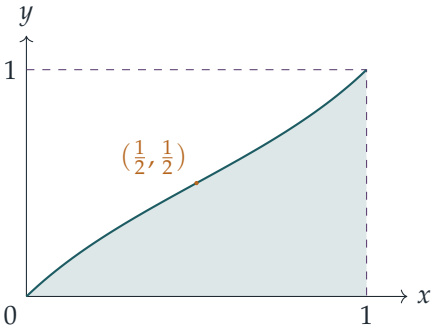
따라서

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sin x}{x(\sin x + \sin \frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

여기서는 인수 $\frac{1}{x}$가 핵심이다. $\mathrm{d}x$가 $x \mapsto a - x$에 의해 변하지 않는 것과 마찬가지로, 측도(measure) $\frac{\mathrm{d}x}{x}$는 $x \mapsto 1/x$에 의해 (방향을 제외하면) 변하지 않는다.

검산

- 피적분함수 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$는 $g(x) + g(a-x) = 1$을 만족한다. 따라서 그 그래프는 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$에 대하여 반 바퀴 회전에 대칭이므로, 그래프 아래의 넓이는 $a \times 1$ 직사각형 넓이의 절반이다. 그림은 첫 번째 적분에 대해 이를 보여 준다.



- 수치적으로 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분은 0.500000, 두 번째 적분은 1.110721($\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$), 소문항 (ii)는 0.693147 ($\ln 2 \approx 0.693147$)이 나온다.

흔한 실수

- $\sin(x + \frac{\pi}{4})$를 고쳐 쓸 때 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨려서 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ 대신 $\frac{\pi}{4}$를 얻는 것.
- 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{x}$를 놓치는 것. 이것은 u로 바뀌고, $-\frac{1}{u^2}$과 결합하여 $-\frac{1}{u}$이 남는다.

STEP 너머

두 기법 모두 적분의 "측도"를 바꾸지 않는 구간의 대칭성을 이용한다. 반사 $x \mapsto a - x$는 $\mathrm{d}x$를 보존하고, 역수 변환 $x \mapsto 1/x$는 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$를 보존한다. 대학에서는 이것이 불변 측도(invariant measure)라는 개념으로 발전한다. 예를 들어 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$는 곱셈에 대한 양의 실수 위의 자연스러운 측도이며, 멜린 변환(Mellin transform)의 바탕이 된다. 치환적분의 실해석학적 기초에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. STEP

스타일의 적분 기법을 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.