풀이

STEP II 2010, 문제 3

순수수학 • 피보나치 수와 점화식

> **STEP II 2010, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q3

핵심 아이디어

주어진 항이 네 개이고 미지수도 네 개이다. $(*)$에 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하여 연립방정식을 풀면 된다. 요령은 한 식을 다른 식으로 나누는 것이다. 그러면 a가 소거되고, 조건이 $\lambda + \mu$와 $\lambda\mu$에 대한 식으로 바뀐다. 이 두 값은 대칭함수(symmetric function)로서, λ와 μ를 한 이차방정식(quadratic equation)의 두 근으로 만들어 준다. 공식을 알고 나면 (iii)의 합은 두 등비급수(geometric series)로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

$(*)$에 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

첫째 식에서 $b = -a$이므로 나머지 세 식은 다음과 같이 된다.

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

특히 $a(\lambda - \mu) = 1$로부터 $a \neq 0$이고 $\lambda \neq \mu$임을 알 수 있다. 인수분해하면

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

이므로 둘째 식과 셋째 식을 $a(\lambda - \mu) = 1$로 나누면(이 값은 0이 아니므로 나눌 수 있다)

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

를 얻는다. 이 가운데 둘째 식이 바로 보여야 할 결과이다.

> **생각해 보기** 이 두 식으로부터 λ와 μ 자체는 어떻게 구할 수 있을까?

둘째 식을 합과 곱으로 나타내자. $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$이므로 $1-\lambda\mu=2$이고 $\lambda\mu=-1$이다. 합이 1이고 곱이 -1인 두 수는

$$t^2-t-1=0, \qquad \text{따라서} \qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

의 두 근이다. 어느 근이 λ일까? $a(\lambda-\mu)=1$이고 $a>0$이므로 $\lambda-\mu>0$이어야 한다. 따라서 λ는 큰 쪽의 근이다. 그러면 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$이고

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

이다. (두 근을 반대로 놓으면 $a=-1/\sqrt{5}$가 되어야 하므로 이 경우는 제외된다.) 역으로, 위의 모든 단계는 거꾸로 거슬러 갈 수 있으므로 이 값들은 네 식을 모두 만족한다.

소문항 (ii)

$F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$이다. $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$을 직접 전개하는 대신, λ가 $t^2=t+1$의 근이라는 사실을 이용하여 거듭제곱의 차수를 낮춘다.

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\lambda+1,\\ \lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\ \lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.\end{aligned}$$

μ도 같은 이차방정식을 만족하므로 똑같은 계산이 성립하여 $\mu^6=8\mu+5$이다. 따라서

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

소문항 (iii)

$(*)$를 이용하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

$\lambda\approx 1.618$이고 $\mu\approx -0.618$이므로 두 공비(common ratio) $\lambda/2$와 $\mu/2$는 모두 절댓값이 1보다 작다. 따라서 두 등비급수는 모두 수렴(converge)하고, 합을 두 급수의 차로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2}-\frac{1}{1-\mu/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda}-\frac{1}{2-\mu}\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)}=\frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},\end{aligned}$$

여기서 $\lambda - \mu = \sqrt{5}$를 이용하였다. $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu = -1$이므로 분모는 $4 - 2 - 1 = 1$이고, 따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

검산

이 공식은 정수를 주어야 한다. $\lambda^4 = 3\lambda + 2$를 이용하면 $F_4 = (\lambda^4 - \mu^4)/\sqrt{5}$에서 $F_4 = 3$을 얻고, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$은 처음 네 항에서 보이는 규칙 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$에 들어맞는다. (iii)의 경우 부분합 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{19}{32}$, ... 은 1을 향해 조금씩 올라간다. 처음 300개 항을 수치적으로 더하면 기계 정밀도 안에서 1.0000000이 나온다. 항들이 $(0.809)^n$ 정도로만 줄어들기 때문에 수렴은 느리다.

흔한 실수

- 어느 근이 λ인지 정할 때 $a > 0$을 쓰는 것을 잊는 실수. 이 조건이 없으면 답이 하나로 정해지지 않는다.
- $\lambda - \mu$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수($a(\lambda - \mu) = 1$이므로 0이 아니다).
- 각 급수가 수렴하는지 확인하지 않고 무한급수의 합을 두 급수로 나누는 실수.

STEP 너머

여기서 다룬 공식은 피보나치 수(Fibonacci numbers)에 대한 비네(Binet) 공식이고, 사용한 방법은 선형 점화식(linear recurrence)에 대한 일반적인 방법이다. λ와 μ는 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$의 특성방정식(characteristic equation) $t^2 = t + 1$의 두 근이다. 소문항 (iii)은 생성함수(generating function) $\sum F_n x^n = x/(1 - x - x^2)$의 $x = \frac{1}{2}$에서의 값을 구하여 절반으로 나눈 것이며, 그 결과 역시 1이 된다. 생성함수는 대학 1학년 조합론과 확률론의 주요한 도구이다. 연분수(continued fraction) 이론에서 황금비(golden ratio) λ와 피보나치 수가 어떻게 나타나는지는 Davenport, *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.