풀이

STEP II 2010, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분법

> **STEP II 2010, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q2

핵심 아이디어

삼차식(cubic) $7\sin x - 8\sin^3 x$는 그대로 적분하기 까다로워 보이지만, 이것이 삼배각 공식(triple-angle formula)으로 만들어져 있다는 것을 알아차리면 사정이 달라진다. 즉 $\sin 3x$의 두 배에 약간의 나머지를 더한 것이다. 그다음 코사인의 삼배각 공식을 쓰면 답이 다시 $c = \cos\alpha$에 대한 다항식이 된다. Eustace의 적분에서는 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$를 이용하면 그의 (틀린) 답도 같은 변수로 나타낼 수 있고, 두 결과를 비교하면 c에 대한 사차식(quartic)이 나오는데, 그 근에 대해서는 이미 힌트가 주어져 있다.

풀이

삼배각 공식

덧셈정리(addition formulae)와 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 같은 방법으로 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

소문항 (i)

사인 공식에서 $8 \sin^3 x = 6 \sin x - 2 \sin 3x$이므로

$$7 \sin x - 8 \sin^3 x = \sin x + 2 \sin 3x.$$

이제 적분은 쉽다.

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3} \cos 3x \Big]_0^{\alpha} = -\cos \alpha - \tfrac{2}{3} \cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

코사인 공식에 의해 $\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$이므로

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$\mathrm{I}(\alpha) = 0$이 되게 하는 c의 값을 찾자. $\alpha = 0$으로 두면 적분은 자명하게 0이므로 $c = 1$이 조건을 만족한다(확인: $-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$). 사실 이것이 유일한 값인데, $8c^3 - 3c - 5 = (c - 1)(8c^2 + 8c + 5)$이고 이차식의 판별식(discriminant)이 $64 - 160 < 0$이기 때문이다.

소문항 (ii)

Eustace의 규칙에 따르면 $\int \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin^2 x$이고 $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin^4 x$이므로, 그가 구한 정적분(definite integral)의 값은

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2} \sin^2 x - 2 \sin^4 x \Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2} s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin \alpha.$$

이다. 소문항 (i)과 비교하기 위해 $s^2 = 1 - c^2$로 쓰면

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} c^2 - 2c^4.$$

$\cos \beta = -\frac{1}{6}$인 경우. $c = -\frac{1}{6}$이면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\beta) &= -\tfrac{8}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{216} \big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162}, \\ \mathrm{E}(\beta) &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{36} - 2 \cdot \tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.\end{aligned}$$

두 값이 일치하므로, Eustace는 운 좋게 $\mathrm{I}(\beta)$의 올바른 값을 얻는다.

가능한 모든 α의 값. Eustace의 답이 맞는 것은 정확히 $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$일 때이고, 이는 (6을 곱하고 항을 정리하면)

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

과 같다.

? **생각해 보기** 공식 없이 이런 사차식을 어떻게 인수분해(factorise)할 수 있을까?

우리는 이미 두 근을 알고 있다. 방금 한 계산에 의해 $c = -\frac{1}{6}$이 근이므로 $6c+1$은 인수이다. 또 $c = 1$(즉 $\alpha = 0$)도 근이어야 하는데, 그때 I와 E가 모두 0이기 때문이다. $6c+1$로 나누면(c^3과 c의 계수를 비교하면)

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c+1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

이고, $c = 1$이 이 삼차식의 근이므로

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1).$$

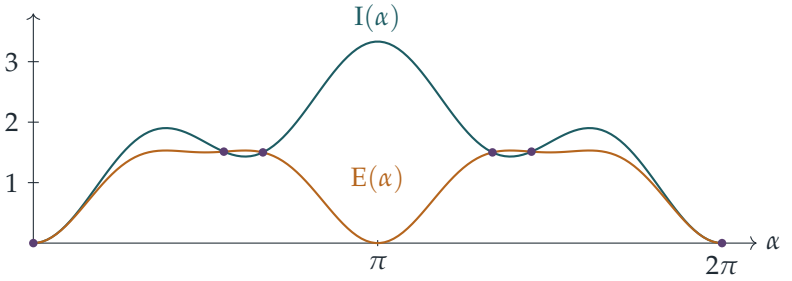
따라서 조건은

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2 = 0, \qquad \text{즉} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ 또는 } -\tfrac{1}{6}.$$

$c = \cos\alpha$이고 $[-1, 1]$에 속하는 모든 c의 값은 어떤 α로부터 얻어지므로, Eustace가 $\mathrm{I}(\alpha)$의 올바른 값을 얻는 것은 정확히 어떤 정수 n에 대하여

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{또는} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

일 때이다. (음수인 α도 포함된다. I와 E는 모두 $\cos\alpha$를 통해서만 α에 의존하기 때문이다.) 그래프는 $0 \le \alpha \le 2\pi$에서 실제 적분값(청록색)과 Eustace의 답(호박색)을 보여 준다. 두 곡선은 $\alpha = 0$, $\frac{2\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$에서 만나고, $\alpha = \pi$에 대하여 이들과 대칭인 점에서도 만난다.



검산

▶ $\alpha = \pi$ ($c = -1$)일 때 공식은 $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$을 주고, 이는 $\int_0^\pi (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$과 일치한다.

- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$을 얻고, 이는 $\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$과 일치한다. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$에서는 적분값과 Eustace의 답이 모두 1.5이다.

흔한 실수

- 아래끝을 잊는 것: $-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$이고, 이것이 $+\frac{5}{3}$을 만든다.
- $c = 1$이 사차식의 **중근**(double root)이라는 것을 놓치거나, 아예 잊어버리고 $c = -\frac{1}{2}$와 $c = -\frac{1}{6}$만 답하는 것.
- $[0, \pi]$에 속하는 α만 답하는 것. 문제는 모든 값을 요구한다.

STEP 너머

$\sin^3 x$ 같은 거듭제곱을 $\sin x$와 $\sin 3x$의 결합으로 쓰는 것은 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. 모든 거듭제곱 $\sin^n x$는 $\sin kx$ 또는 $\cos kx$의 유한합이며, 이는 $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$를 이용하면 빠르게 구할 수 있다. $\cos nx$를 $\cos x$로 나타내는 다항식은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) T_n이며, $T_3(c) = 4c^3 - 3c$이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)가 왜 이 모든 항등식을 자연스럽게 만드는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.