풀이

STEP II 2010, 문제 11

역학 • 세 힘의 평형

> **STEP II 2010, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q11

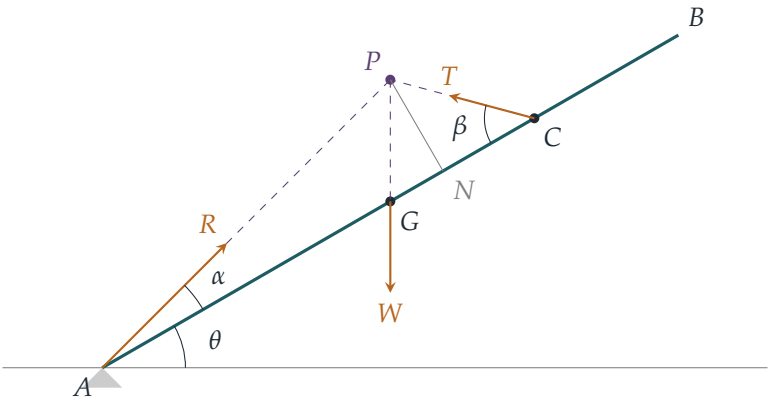
핵심 아이디어

막대에 작용하는 힘은 세 가지뿐이다. 막대의 무게, A에서의 반력(reaction), 그리고 C에서의 장력(tension)이다. 평행하지 않은 세 힘이 한 물체를 평형(equilibrium) 상태로 유지할 때, 세 힘의 작용선(line of action)은 반드시 한 점을 지나야 한다. 따라서 A에서의 반력의 작용선, C에서의 줄의 방향선, 막대의 중점을 지나는 연직선은 모두 한 점에서 만난다. 그 공통점에서 막대를 따라, 그리고 막대에 수직으로 거리를 재면, 힘 자체를 구할 필요 없이 문제 전체가 간단한 직각삼각형의 삼각법 문제로 바뀐다.

풀이

모형과 그림

막대를 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로 모형화하므로, 무게 W는 중점 G에 작용하고 $AG = 2L$이다. 줄은 가벼우므로(light) C에서 자기 길이 방향으로 막대를 당기며, 여기서 $AC = 3L$이다. 받침은 A에서 하나의 힘 R을 작용한다(받침이 매끄러운지 거친지는 주어지지 않았으며, 알 필요도 없다). 그림은 $\theta = 30°$, $\beta = 45°$인 경우를 축척에 맞게 그린 것이다.



공식 보이기

무게는 G를 지나 연직으로 작용하고, 줄의 작용선은 C를, 반력의 작용선은 A를 지난다. 이 세 직선은 평행하지 않으므로 세 직선 모두 한 점을 지나며, 이 점을 P라 하자.

생각해 보기 세 작용선은 왜 한 점에서 만나야 할까?

R와 T의 작용선이 P에서 만난다고 하자. P에 대한 모멘트(moment)를 취하면 R와 T의 모멘트는 모두 영이므로, 막대가 회전 평형을 이루려면 무게의 P에 대한 모멘트도 영이어야 한다. 이는 G를 지나는 연직선도 P를 지난다는 뜻이다.

P에서 막대에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하고, $h = PN$이라 하자. 직각삼각형 PNA에서 A에서의 각은 α이므로 $AN = h\cot\alpha$이다. 직각삼각형 PNC에서 C에서의 각은 β이므로 $NC = h\cot\beta$이다. $AN + NC = AC$이므로

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

(α나 β가 둔각이면 N은 A 또는 C의 바깥쪽에 놓이지만, 부호 있는 길이(signed length) $h\cot\alpha$와 $h\cot\beta$의 합은 여전히 AC이므로 (1)은 모든 경우에 성립한다.)

이제 세 번째 작용선을 이용하자. 막대는 수평면과 각 θ를 이루므로, 수선 PN은 연직선 PG와 각 θ를 이룬다. 직각삼각형 PNG에서 P에서의 각은 θ이므로 $GN = h\tan\theta$이고, 그림에서처럼 N은 G의 위쪽(A에서 더 먼 쪽)에 놓인다. 따라서

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

(1)에서 (2)를 빼면 $h\cot\beta = L - h\tan\theta$, 즉

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

이 L의 값을 (2)에 대입하면

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

$h \neq 0$이므로(그렇지 않으면 P가 막대 위의 G에 놓이게 되고, C에 매인 줄이 막대를 따라 놓이게 되어 A에 대한 무게의 모멘트와 균형을 이룰 수 없다) h로 나눌 수 있다.

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

이로써 원하는 식이 증명되었다.

$\theta = 30°$, $\beta = 45°$인 경우

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$이고 $\cot 45° = 1$이므로

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

이제 $\cot 15°$를 구해야 한다. $A = 45°$, $B = 30°$로 두고 $\tan(A - B)$를 이용하면

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

이므로

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

따라서 $\cot\alpha = \cot 15°$이다. 각 α는 $0°$와 $180°$ 사이에 있고, 이 구간에서 cot은 순감소(strictly decreasing)하므로 각 값을 정확히 한 번씩만 가진다. 그러므로 $\alpha = 15°$이다.

검산

- **독립적인 다른 방법.** A에 대한 모멘트를 취하면 $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$이다. 이어서 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하면 R의 성분이 나오고, $\cot\alpha$는 그 성분들의 비이다. 이렇게 하면 같은 공식이 다시 얻어진다. 이 방법으로 무작위 순서쌍 (θ, β) 10^5개에 대해 수치적으로 확인했으며, 약 10^{-15} 이내로 일치했다.
- **특수한 값.** $\theta = 30°$, $\beta = 45°$일 때 수치적으로 구한 평형은 $\alpha = 15.000°$를 주며, $\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$이다. 그림은 축척에 맞게 그려져 있다. P는 G의 바로 위, A보다 $\sqrt{3}L$만큼 높은 곳에 있다.
- **극한의 경우.** $\theta \to 0$이고 $\beta = 90°$이면(수평인 막대, 연직인 줄) 공식은 $\cot\alpha = 0$을 주므로 $\alpha = 90°$이다. 즉 반력도 연직이며, 다른 모든 힘이 연직일 때 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 무게를 C에 두거나 $AG = 3L/2$로 잡는 것. 무게는 막대 전체의 중점, 즉 A에서 $2L$인 곳에 작용한다.
- GN의 부호를 틀리는 것. 막대가 A에서 위로 기울어져 있으므로, G를 지나는 연직선은 P에서 내린 수선과 G에 대해 A의 반대쪽에서 만난다. 따라서 $AN = 2L + h\tan\theta$이며, $2L - h\tan\theta$가 아니다.
- $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$에서 멈추고, 이것이 $\cot 15°$임을 보이지 않거나 이 값이 왜 α를 유일하게 결정하는지 말하지 않는 것.

STEP 너머

세 힘 정리(three-force theorem)는 정역학(statics)의 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 강체(rigid body)에 작용하는 임의의 힘들의 계는 선택한 한 점을 지나는 하나의 힘과 하나의 우력(couple)으로 환원되며, 평형이란 이 둘이 모두 영이라는 뜻이다. 대학에서는 이것이 전체 힘과 전체 모멘트 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$가 모두 영이 된다는 벡터 조건이 되고, 이는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 토대가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크(torque)와 평형을 이러한 벡터 언어로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.