풀이

STEP II 2010, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

> **STEP II 2010, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.2 절 **포갠 공 효과**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/stacked-balls.html

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 충돌, 즉 한 입자가 정지해 있는 입자에 탄성(elastic) 충돌하는 상황에 달려 있다. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)($e = 1$인 경우)을 함께 쓰면 전달되는 속력을 구할 수 있고, 이 속력은 질량의 비(*ratio*)에만 의존한다. 소문항 (ii)에서는 모든 충돌의 질량비가 λ로 같으므로 충돌할 때마다 속력에 같은 인수가 곱해지고, 나머지는 등비수열(geometric progression)이 해결해 준다.

풀이

입자들을 매끄러운 탁자 위의 한 직선을 따라 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, 모든 속도는 B의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 잰다.

소문항 (i)

충돌 직후 B와 A의 속도를 각각 v_B, v_A라 하자. 운동량 보존에 의하여

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

이고, 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌($e = 1$)이므로 뉴턴의 실험 법칙에 의하여 멀어지는 속력과 가까워지는 속력이 같다.

$$v_A - v_B = u.$$

$v_B = v_A - u$를 운동량 방정식에 대입하고 m을 약분하면

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

따라서 A의 속력은 $\dfrac{2b}{b+1}\,u$이다.

이 식은 질량의 비 b만을 사용하였고, 유도 과정은 모든 $b > 0$에 대하여 성립한다. $b + 1 > b$이고 $u > 0$이므로

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

가 b의 값에 관계없이 성립한다. 따라서 A가 B의 처음 속력의 두 배로 움직이게 할 수는 결코 없지만, b를 크게 잡으면 $2u$에 원하는 만큼 가까워지게 할 수 있다.

소문항 (ii)

직선을 따라 차례로 놓인 입자들의 질량은 다음과 같다.

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

각 입자는 바로 다음 입자보다 λ배 무겁다. 따라서 속력 v로 움직이는 입자가 다음의 (정지해 있는) 입자에 부딪힐 때마다 $b = \lambda$로 하여 소문항 (i)을 적용할 수 있고, 부딪힌 입자는 속력 kv로 움직이기 시작한다. 여기서

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

소문항 (i)의 식 $v_B = v_A - u$로부터, 부딪친 입자는 속력

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,v,$$

로 계속 앞으로 움직이며, $\lambda > 1$이므로 이 값은 양수이다.

따라서 B_1은 B_2에게 속력 ku를 주고, 이어서 B_2는 B_3에게 속력 k^2u를 주며, 이와 같이 계속하여 마침내 속력 $k^{n-1}u$로 움직이는 B_n이 A에게 속력

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right)^n u.$$

를 준다.

생각해 보기 어떤 B_i가 속력을 전달한 뒤 앞의 입자를 따라잡아 추가 충돌이 일어날 수 있을까?

n번의 충돌이 모두 끝난 뒤 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 B_i는 속력 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}k^{i-1}u$로 앞으로 움직이고, A는 속력 $k^n u$로 움직인다. $\lambda > 1$이면 $2\lambda > \lambda + 1$이므로 $k > 1$이고, 따라서 이 속력들은 직선을 따라 순증가한다. 즉 각 입자가 바로 뒤의 입자보다 빠르게 움직이므로 입자들은 서로 멀어진다. 그러므로 더 이상의 충돌은 없으며, A의 최종 속력은 $k^n u$이다.

$k > 1$이므로 $n \to \infty$일 때 $k^n \to \infty$이다. 따라서 임의의 목표 속력 V에 대하여 $k^n u > V$가 되도록 n을 충분히 크게 잡으면 A는 V보다 빠르게 움직인다. 즉 A의 속력에는 상한이 없다.

$\lambda = 4$인 경우

이때 $k = \frac{8}{5}$이고, $\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$을 만족하는 가장 작은 n을 구해야 한다. 밑이 10인 로그(logarithm)를 취하면 (로그는 증가함수이므로 부등식의 방향이 유지된다)

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

$\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$, $20 = 2 \times 10$으로 쓰면

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

$\log_{10} \frac{8}{5} > 0$이므로 양변을 이 값으로 나눌 수 있고, 따라서

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

이를 만족하는 가장 작은 정수는 $n = 7$이다. (여유가 충분하다. 6.37은 정수와 멀리 떨어져 있으므로 $\log_{10} 2$의 근삿값 때문에 답이 바뀔 수는 없다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $b = 1$이면 $v_A = u$, $v_B = 0$이다. 질량이 같은 두 입자는 당연히 속도를 서로 맞바꾼다. $b \to \infty$이면 $v_A \to 2u$이다.
- 운동 에너지(kinetic energy): $v_A = \frac{2b}{b+1}u$, $v_B = \frac{b-1}{b+1}u$이면 $bv_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2+4b^2}{(b+1)^2}u^2 = bu^2$이므로 에너지가 보존된다.
- 직접 계산하면 $1.6^6 \approx 16.78 < 20$이고 $1.6^7 \approx 26.84 > 20$이므로 $n = 7$이 확인된다. 정확한 분수를 써서 입자들의 사슬을 한 단계씩 시뮬레이션해 보아도 정확히 n번의 충돌 후 A의 속력이 정확히 $k^n u$로 나왔다.

흔한 실수

- 질량의 순서를 거꾸로 생각하는 실수: B_1이 **가장 무겁고**($\lambda^n m$) B_n이 B들 중 가장 가벼우며(λm), A는 그보다 더 가볍다.
- 충돌 횟수를 n이 아니라 $n-1$로 세는 실수: 속력은 $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$로 전달되며, 이는 n단계이다.
- 이후의 충돌이 없음을 보이는 것을 빠뜨리거나, 가장 작은 정수 $n = 7$ 대신 정수가 아닌 6.37을 답으로 쓰는 실수.

STEP 너머

한 번의 탄성 충돌로는 속력을 기껏해야 두 배로 만들 수 있지만, 충돌의 사슬에는 그런 한계가 없다. 이것이 "쌓은 공(stacked ball)" 시연의 원리로, 무거운 공 위에 가벼운 공을 올려놓고 떨어뜨리면 가벼운 공이 떨어진 높이보다 훨씬 높이 튀어 오른다. 운동량과 에너지를 통하여 (그리고 더 깔끔하게는, 탄성 충돌이 각 속도를 단순히 반대로 뒤집기만 하는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서) 충돌을 분석하는 것은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이를 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.