풀이

STEP II 2010, 문제 1

순수수학 • 곡률과 접촉원

> **STEP II 2010, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

핵심 아이디어

"접한다(touches)"는 것은 원과 곡선이 점 P를 공유하고 그 점에서 기울기(gradient)도 같다는 뜻이고, "기울기의 변화율"은 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$를 뜻한다. 따라서 P에서 y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$의 값이 모두 곡선의 값과 일치하는 원을 찾아야 한다. 일반적인 원의 방정식을 음함수 미분(implicit differentiation)으로 두 번 미분하면, 이 조건은 중심에 대한 간단한 방정식이 된다.

풀이

점 P에서의 곡선

$y = 1 - x + \tan x$에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$에서 $\tan x = 1$이고 $\sec^2 x = 2$이므로

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

따라서 $P = (\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi)$이다.

원

원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$이라 하자. x에 대하여 음함수 미분하면

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

이고, 한 번 더 미분하면(둘째 항에 곱의 미분법(product rule)을 적용한다)

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

? 생각해 보기 왜 곡선의 값을 원의 방정식에 바로 대입해도 되는가?

이 두 방정식은 원 위의 모든 점에서 성립하며, 이때 y, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$는 원 자신의 값이다. 주어진 두 조건은 원이 P를 지나고, P에서 C와 같은 기울기와 같은 이계도함수(second derivative)를 가진다는 뜻이다. 따라서 P에서는 $x=\frac{1}{4}\pi$, $y=2-\frac{1}{4}\pi$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$를 사용해도 된다.

둘째 방정식에서

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

이를 첫째 방정식에 넣으면

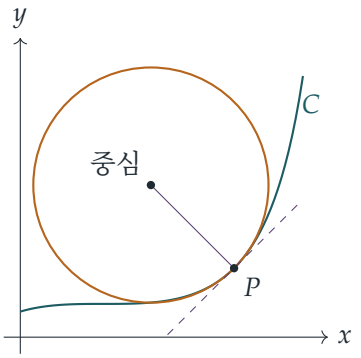
$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

마지막으로 $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$이다. 따라서 접촉원(osculating circle)은

$$\text{중심}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad \text{반지름} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 가진다.

이 결과는 기하학적으로도 타당하다. 중심은 P에서 방향 $(-1,1)$을 따라 거리 $\frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있는데, 이 방향은 기울기가 1인 접선(tangent)에 수직이다. 또한 중심은 $y>2-\frac{1}{4}\pi$인 쪽, 즉 곡선의 위쪽에 있다. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$이어서 그 근처에서 곡선이 아래로 볼록(concave upwards)하므로 이는 옳다.



검산

- 일반적인 곡률반지름(radius of curvature) 공식 $\rho = \left(1 + y'^2\right)^{3/2} / |y''|$에 대입하면 $2^{3/2}/4 = 1/\sqrt{2}$로, 앞에서 구한 값과 같다.
- 수치적으로 중심은 약 $(0.2854,\ 1.7146)$, P는 약 $(0.7854,\ 1.2146)$이고, 두 점 사이의 거리는 0.70711이다. 원의 아랫부분 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$을 잡아 $x = 0.7854$에서 수치 미분하면 기울기 1.0000, 이계도함수 4.000을 얻어 곡선과 일치한다.

흔한 실수

- 중심을 접선의 반대쪽에 놓는 실수: $y - b$의 부호는 둘째 방정식이 정해 주므로, 계산 결과에 맡기면 된다.
- $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 미분할 때 곱의 미분법이 필요하다는 것을 잊는 실수: $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ 항은 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

접촉원의 반지름이 곡률반지름이고, 그 역수 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$가 곡률(curvature)이다. 곡률은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 가장 중심적인 양이다. 공간곡선에서는 곡률과 비틀림률(torsion)이 함께 프레네-세레 공식(Frenet–Serret formulae)에 나타나며, 이 공식은 곡선이 어떻게 휘어지고 비틀리는지를 기술한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.