풀이

STEP I 2010, 문제 9

역학 • 마찰과 평형

> **STEP I 2010, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

핵심 아이디어

바닥에 닿은 꼭짓점을 알려진 위치에 두고, 서로 수직인 두 변을 따라 질량중심(centre of mass)까지 걸어가 보면 벽으로부터의 거리를 얻는다. 평형(equilibrium)에 대해서는 "두 접촉점 모두에서 한계 상태"라는 조건 때문에 각 마찰력이 그 수직항력(normal reaction)의 μ배로 정해지므로, 두 방향의 힘의 분해(resolution)로부터 두 수직항력을 모두 무게로 나타낼 수 있다. 그런 다음 모멘트(moment) 방정식 하나로 마무리하고, $\mu = \tan\lambda$로 두면 계산이 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 바뀐다.

풀이

모형

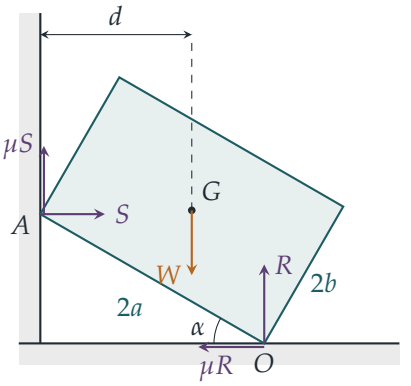
이 얇은 판(lamina)은 무게가 W인 균일한 강체 직사각형이므로, 질량중심 G는 직사각형의 중심이다. 바닥에 닿은 꼭짓점을 O, 벽에 닿은 꼭짓점을 A라 하자. 그러면 OA는 길이가 $2a$이고 바닥과 각 α를 이루는 변이며, O에서 나오는 길이 $2b$의 변은 벽에서 멀어지는 쪽 위를 향한다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- O에서: 위쪽으로 작용하는 수직항력 R과 수평 방향의 마찰력 F;
- A에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 S와 연직 방향의 마찰력 P;
- G에서 아래쪽으로 작용하는 무게 W.

판은 O가 벽에서 멀어지는 쪽으로 미끄러지고 A가 벽을 따라 아래로 미끄러지기 직전에 있으므로, 마찰력은 이 운동을 방해한다. 즉 F는 벽 쪽으로, P는 위쪽으로 작용한다. 두 접촉

점 모두에서 마찰이 최대 정지 마찰(limiting friction) 상태이므로

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



벽으로부터 질량중심까지의 거리

OA는 길이가 $2a$이고 수평과 각 α를 이루므로, O는 벽으로부터 수평 거리 $2a\cos\alpha$만큼 떨어져 있다.

O에서 출발하여 O에서 만나는 두 변을 각각 절반씩 따라가면 G에 도달한다. OA를 따라 (벽 쪽으로) a만큼 가면 벽 쪽으로 $a\cos\alpha$만큼 이동한다. 길이 $2b$의 변은 OA에 수직이므로 수평과 각 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$를 이루며 벽에서 멀어지는 쪽으로 기울어 있다. 이 변을 따라 b만큼 가면 벽에서 멀어지는 쪽으로 $b\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = b\sin\alpha$만큼 이동한다. 따라서 벽으로부터 G까지의 거리는

$$d = 2a\cos\alpha - a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\alpha + b\sin\alpha,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 같은 방법으로, G는 바닥으로부터 높이 $a\sin\alpha + b\cos\alpha$에 있고, A는 바닥으로부터 높이 $2a\sin\alpha$에 있다.

평형 조건

힘을 수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$S = \mu R,$$
$$R + \mu S = W.$$

첫째 식을 둘째 식에 대입하면 $R(1+\mu^2) = W$이므로

$$R = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

이제 O에 대한 모멘트를 구하면 R와 μR가 사라진다. 수평 방향으로 G는 O보다 $2a\cos\alpha - d = a\cos\alpha - b\sin\alpha$만큼 벽에 더 가까우므로, 무게의 모멘트는 $W(a\cos\alpha - b\sin\alpha)$이고 판

을 벽 쪽으로 돌리려 한다. A에서 힘 S는 O보다 높이 $2a\sin\alpha$만큼 위에 있는 직선을 따라 작용하고, μS는 O로부터 수평 거리 $2a\cos\alpha$만큼 떨어진 벽을 따라 작용한다. 두 힘 모두 판을 벽에서 멀어지는 쪽으로 돌리려 한다. 따라서

$$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha) = S\cdot 2a\sin\alpha + \mu S\cdot 2a\cos\alpha = \frac{2a\mu W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}. \qquad (*)$$

? **생각해 보기** $\mu=\tan\lambda$로 두면 우변이 어떻게 깔끔해지는가?

$\mu=\tan\lambda$이면 $1+\mu^2=\sec^2\lambda$이므로

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$
$$\sin\alpha+\mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda+\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

따라서 $(*)$의 우변은 $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$이다. W를 약분하고 $P=\alpha+\lambda$, $Q=\lambda$로 두어 $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$를 이용하면

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)\\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha-\cos(\alpha+2\lambda)\big)\\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다.

정사각형 판

판이 정사각형이면 $b=a$이고, $a\neq 0$으로 나누면

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\right).$$

따라서 어떤 정수 k에 대하여 $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)+2k\pi$이다. 올바른 경우를 골라야 한다. 여기서 $0<\alpha<\frac{1}{2}\pi$이고(판이 기대어 있으므로), $\mu>0$이므로 $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $0<2\lambda+\alpha<\frac{3}{2}\pi$이다.

- $+$ 부호이면 $2\lambda+\alpha=\frac{1}{2}\pi-\alpha+2k\pi$이다. $\frac{1}{2}\pi-\alpha$가 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 있으므로 $(0,\frac{3}{2}\pi)$에 들어가는 것은 $k=0$뿐이고, 이때 $\lambda=\frac{1}{4}\pi-\alpha$이다.
- $-$ 부호이면 $2\lambda=-\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, 즉 $\lambda=-\frac{1}{4}\pi+k\pi$이고, 이러한 값 중 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 있는 것은 없다.

따라서 구하려던 대로 $\lambda=\frac{1}{4}\pi-\alpha$이다. (특히 이러한 한계 상태의 평형이 성립하려면 $\alpha<\frac{1}{4}\pi$이어야 하며, 이는 G가 O보다 벽 쪽에 있어야 한다는 조건 $a\cos\alpha>a\sin\alpha$와 일치한다.)

검산

- $\mu = 0$ ($\lambda = 0$)이면 조건은 $a\cos\alpha = b\sin\alpha$가 된다. 즉 G가 O의 바로 위에 있으며, 이는 정확히 판이 벽의 도움 없이 꼭짓점 위에서 균형을 잡을 수 있는 경우이다.
- $\alpha = 15°$인 정사각형에 대해 결과는 $\lambda = 30°$을 주므로 $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$이다. $(*)$에 $a = b = 1, \alpha = \frac{\pi}{12}, \mu = 1/\sqrt{3}$을 대입하면 양변 모두 $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 직사각형과 각 2000개에 대해 힘과 모멘트 방정식으로부터 이분법(bisection)으로 μ를 구했고, $a\cos(2\lambda + \alpha) = b\sin\alpha$가 10^{-14} 이내의 오차로 성립함을 확인했다.

흔한 실수

- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것: 먼저 각 접촉점이 어느 쪽으로 미끄러지려 하는지 정한 다음, 그 반대 방향으로 잡아야 한다.
- **벽**으로부터의 거리 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$를 O에 대한 모멘트 팔로 쓰는 것: O에 대한 팔의 길이는 $a\cos\alpha - b\sin\alpha$이다.
- $\lambda = \frac{3}{4}\pi$도 삼각방정식의 해라는 사실을 잊는 것: 이 값은 $\mu > 0$이면 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$이어야 하므로 제외된다.

STEP 너머

$\tan\lambda = \mu$를 만족하는 각 λ를 **마찰각**(angle of friction)이라 한다. 최대 정지 마찰 상태에서 전체 접촉력은 법선과 각 λ를 이룬다. 깔끔한 다른 접근법은 세 힘을 받아 평형을 이루는 강체에서는 세 힘의 작용선이 한 점에서 만나야(concurrent) 한다는 사실을 이용하는 것이다. 즉 두 전체 접촉력과 무게가 한 점에서 만나야 하므로, 문제가 순수한 기하 문제로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 뉴턴 역학의 나머지 내용과 함께 강체의 정역학과 마찰을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.