풀이

STEP I 2010, 문제 8

순수수학 • 무한 강하법

> **STEP I 2010, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

핵심 아이디어

두 소문항 모두 **무한 강하법**(infinite descent)이라는 같은 기법을 사용한다. 먼저 방정식을 어떤 소수(prime)를 법(modulo)으로 하여 살펴보면(소문항 (i)에서는 3, 소문항 (ii)에서는 5), 그 소수가 모든 미지수를 나누어야 함을 알 수 있다. 그 소수로 나누어 내면 **정확히 같은 방정식**의 더 작은 해가 얻어지는데, 영이 아닌 정수를 3(또는 5)으로 끝없이 나눌 수는 없다. 실제로 해야 할 일은 어떤 나머지(residue)가 가능한지 알아내는 것뿐이며, 소문항 (ii)에서는 네제곱수(fourth power)의 일의 자리 숫자가 그 일을 대신해 준다.

풀이

소문항 (i)

식을 정리하면

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3(3c^3 - b^3),$$

이므로 3은 a^3을 나눈다. 3은 소수이므로 곱 $a \cdot a \cdot a$를 나누면 그 인수 중 하나를 나누고, 따라서 $3 \mid a$이다.

a_1이 정수일 때 $a = 3a_1$로 쓰자. 대입하고 3으로 나누면

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

이므로 $b^3 = 3(c^3 - 3a_1^3)$은 3으로 나누어떨어지고, 앞에서와 마찬가지로 $3 \mid b$이다. $b = 3b_1$로 쓰면

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3(a_1^3 + 3b_1^3),$$

이므로 $3 \mid c$이기도 하다. 이로써 a, b, c가 모두 3으로 나누어떨어짐을 보였다.

이제 $c = 3c_1$로도 쓰자. 마지막 방정식은 $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$, 즉

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

이 된다.

> **생각해 보기** 3이 모든 것을 나눈다는 것을 보였다. 그런데 왜 이로부터 모든 것이 영이어야 한다는 결론이 나올까?

$(a_1, b_1, c_1) = (a/3, b/3, c/3)$ 역시 **원래** 방정식의 정수해이므로, 방금 증명한 모든 것이 이 해에도 그대로 적용되기 때문이다. 즉 a_1, b_1, c_1은 3으로 나누어떨어지고, 다시 말해 a, b, c는 9로 나누어떨어진다. 이 논증을 k번 반복하면 모든 $k \geq 1$에 대하여 3^k이 a, b, c를 각각 나눈다. 그런데 영이 아닌 정수 n은 $3^k > |n|$이 되면 3^k으로 나누어떨어지지 않는다. 따라서 $a = b = c = 0$이고, 이것은 분명히 해이므로 유일한 해이다.

(같은 내용을 이렇게 말할 수도 있다. $(0,0,0)$이 아닌 해가 있다면, 그중에서 $|a| + |b| + |c|$가 양수이면서 가장 작은 것을 고르자. 그러면 $(a/3, b/3, c/3)$은 그보다 더 작은 양의 값을 갖는 해가 되어 모순이다.)

소문항 (ii)

$p^4 = |p|^4$이므로 p^4의 일의 자리 숫자는 $|p|$의 일의 자리 숫자에만 의존한다.

n의 일의 자리 숫자	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4의 일의 자리 숫자	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

(예를 들어 $2^4 = 16, 3^4 = 81, 7^4 = 2401$이다.) 따라서 네제곱수의 일의 자리 숫자는 0, 1, 5, 6 중 하나이고, 일의 자리가 0 또는 5인 것은 정확히 $5 \mid n$일 때이다.

이제 각 항의 일의 자리 숫자를 살펴보자.

- $5r^4$은 5의 배수이므로 일의 자리가 0 또는 5이다.
- $2q^4$의 일의 자리는 (q^4의 일의 자리가 0 또는 5이면) 0이고, (q^4의 일의 자리가 1 또는 6이면) 2이다.
- p^4의 일의 자리는 0, 1, 5, 6 중 하나이다.

$\{0,1,5,6\}$에 속하는 일의 자리 숫자와 $\{0,2\}$에 속하는 일의 자리 숫자를 더하면 $0,1,5,6,2,3,7,8$ 중 하나가 된다. 0 또는 5가 나오는 경우는 $0+0$과 $5+0$뿐이다. 따라서 $2q^4$의 일의 자리는 0이고, 이는 q^4의 일의 자리가 0 또는 5, 즉 $5 \mid q$라는 뜻이다. 또 p^4의 일의 자리는 0 또는 5, 즉 $5 \mid p$이다. 이로써 p와 q가 5로 나누어떨어짐을 보였다.

(다른 방법: 페르마의 소정리(Fermat's little theorem)에 의해 $5 \nmid n$일 때 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$이므로, $p^4 + 2q^4$는 법 5에 대하여 $0+0, 1+0, 0+2, 1+2$ 중 하나와 합동이고, 이 중 0인 것

은 첫 번째뿐이다.)

$p = 5p_1, q = 5q_1$로 쓰자. 그러면

$$625(p_1^4 + 2q_1^4) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125(p_1^4 + 2q_1^4),$$

이므로 $5 \mid r^4$이고, 5는 소수이므로 $5 \mid r$이다. $r = 5r_1$로 쓰면

$$625r_1^4 = 125(p_1^4 + 2q_1^4) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

따라서 $(p/5, q/5, r/5)$ 역시 같은 방정식의 정수해이다.

소문항 (i)에서와 똑같이, 이를 반복하면 모든 k에 대하여 5^k이 p, q, r을 각각 나누는데, 이는 영이 아닌 정수에 대해서는 불가능하다. 따라서 유일한 정수해는 $p = q = r = 0$이다.

검산

컴퓨터로 탐색해 보면 $|a|, |b|, |c| \leq 60$인 범위에서 $a^3 + 3b^3 = 9c^3$의 해는 $(0, 0, 0)$ 말고는 없고, $|p|, |q|, |r| \leq 150$인 범위에서 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$의 해도 마찬가지로 없다. p와 q의 일의 자리 숫자 쌍 100가지를 모두 확인하면, $p^4 + 2q^4$의 일의 자리가 0 또는 5인 것은 두 일의 자리 숫자가 모두 0 또는 5일 때뿐임을 알 수 있다. 손으로 간단히 확인해 보면, $p = q = 1$일 때 $p^4 + 2q^4 = 3$이며, 표에서 예측한 대로 5의 배수가 아니다.

흔한 실수

- 3(또는 5)이 각 미지수를 나눈다는 것을 보이고 멈추는 것. 그것만으로는 영이라는 결론이 나오지 않는다. 핵심은 나누어 내면 **같은** 방정식의 해가 얻어지므로 논증이 반복된다는 점이다.
- "$3 \mid a^3$"에서 "$3 \mid a$"로 이유 없이 넘어가는 것. 이것이 성립하는 이유는 3이 소수이기 때문이다. 예를 들어 $9 \mid a^3$이면 $9 \mid a$라는 주장은 성립하지 않는다($a = 3$을 대입해 보라).
- 일의 자리 숫자를 나열할 때 음의 정수를 잊는 것. 네제곱은 짝수 거듭제곱이므로 $p^4 = |p|^4$이고, 따라서 표가 모든 경우를 다룬다.

STEP 너머

무한 강하법은 페르마까지 거슬러 올라간다. 페르마는 이 방법으로 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명했다(따라서 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 $n = 4$인 경우도 증명된다). 여기서 사용한 아이디어, 즉 소수의 거듭제곱을 법으로 하여 자명하지 않은 해(non-trivial solution)가 없는 방정식은 자명하지 않은 정수해도 가질 수 없

다는 생각은 p진수(p-adic number)와 하세 원리(Hasse principle)에 대한 연구로 발전한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 강하법을 아름답게 소개하는 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.