풀이

STEP I 2010, 문제 7

순수수학 • 벡터와 교차하는 직선

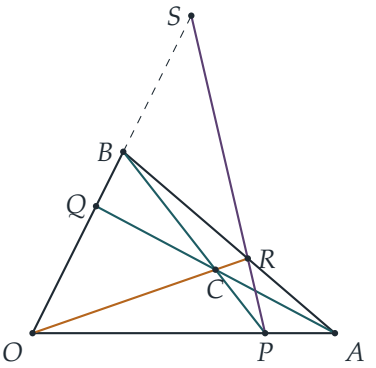
STEP I 2010, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s1-q7

핵심 아이디어

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear), 평면 위의 모든 점은 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$의 꼴로 단 한 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 따라서 두 직선의 교점을 구하려면 각 직선 위의 일반적인 점을 이 꼴로 쓰고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 계수(coefficient)를 비교하면 된다. 한 점이 직선 OB 위에 있을 필요충분조건은 그 점의 $\mathbf{a}$의 계수가 0인 것이고, 직선 AB 위에 있을 필요충분조건은 두 계수의 합이 1인 것이다. 이 두 가지 사실이 거의 모든 일을 해 준다.



그림은 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{20}$인 경우이다. S는 직선 OB 위에 있지만 선분(segment) OB의 바깥에 있고, Q는 O와 B 사이에 있다는 점에 주목하자.

풀이

p와 q 구하기

직선 BC 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu\alpha\,\mathbf{a} + (1 - \mu(1-\beta))\mathbf{b}.$$

이다. 직선 OA 위의 점은 $\mathbf{b}$ 성분이 없는 $\lambda\mathbf{a}$의 꼴이다. O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않고, 따라서 계수를 비교할 수 있다. $\mathbf{b}$의 계수가 0이어야 하므로 $\mu = \dfrac{1}{1-\beta}$이다. $\beta < 1 - \alpha < 1$이므로 $1 - \beta \neq 0$이고, 따라서 이렇게 해도 된다. 그러면

$$\mathbf{p} = \mu\alpha\,\mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

주어진 상황은 $A \leftrightarrow B$와 $\alpha \leftrightarrow \beta$를 서로 바꾸어도 대칭이므로(이때 $P \leftrightarrow Q$가 서로 바뀐다), 곧바로

$$\mathbf{q} = \frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

라고 쓸 수 있다.

점 R

먼저, $\mathbf{r} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$는 $\mathbf{c}$의 스칼라배이므로 R는 직선 OC 위에 있다.

다음으로, $t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$로 두고 $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$로 쓰자. 실제로 $1 - t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$이고, 이는 $\mathbf{r}$에서 $\mathbf{b}$의 계수이다. $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 꼴의 점들은 정확히 직선 AB 위의 점들이므로, R는 AB 위에도 있다.

점 S

직선 PR 위의 일반적인 점은 $\mathbf{p} + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$이고, 이는

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta} + t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a} \;+\; \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

와 같다. 이 점이 OB 위에 있으려면 $\mathbf{a}$의 계수가 0이어야 한다. $\alpha \neq 0$으로 나누면

$$\frac{1}{1-\beta} = t \cdot \frac{(\alpha+\beta) - (1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

를 얻는다. (문제에서 두 직선이 만난다고 했으므로 반드시 $\alpha + 2\beta \neq 1$이다. $\alpha + 2\beta = 1$이면 PR는 OB와 평행하다.) 그러므로

$$\mathbf{s} = \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

이다.

생각해 보기 위치벡터(position vector) $k\mathbf{b}$로부터 O까지의 거리와 B까지의 거리의 비를 어떻게 구할까?

X의 위치벡터가 $k\mathbf{b}$이면 $\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$이고 $\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$이므로

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

이다. 그림의 S처럼 k가 음수이거나 1보다 클 수 있으므로 절댓값이 중요하다.

비

Q의 경우 $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$이고, $0 < \beta < 1-\alpha$이므로 $0 < k < 1$이다. 그러면 $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$이므로

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

이다. S의 경우 $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$이므로

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

이다. 절댓값을 취하고 $\beta > 0, 1-\alpha-\beta > 0$임을 이용하면

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

이다. 이로써 증명이 끝난다. 절댓값을 취하기 전의 음의 부호는 Q가 OB를 내분하고 S가 같은 비로 OB를 외분한다는 것을 말해 준다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{7}{20}$(그림의 경우)을 대입해 보자. 그러면 $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$, $\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$이므로 $OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$이고 $OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$이다. 공식으로는 $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$이다.
- 임의의 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, α, β에 대해 두 직선의 방정식을 연립하여 네 교점을 모두 직접 계산하고 공식과 비교했으며, 두 비가 일치하는지도 확인했다. 8000개가 넘는 경우에서 모두 일치했다.
- 대칭성: $\alpha \leftrightarrow \beta$와 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$를 서로 바꾸면 $\mathbf{p}$의 공식이 $\mathbf{q}$의 공식이 되며, 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 절댓값을 빠뜨리는 것. **s**의 계수는 음수이거나 1보다 클 수 있으므로, 부주의하게 $k/(1-k)$를 계산하면 음수인 "길이의 비"가 나온다.
- 왜 그렇게 해도 되는지 밝히지 않고 **a**와 **b**의 계수를 비교하는 것. 계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 평행하지 않기 때문이다.

STEP 너머

점 Q와 S는 OB를 같은 비로 내분하고 외분하므로, O와 B에 대한 **조화켤레**(*harmonic conjugates*)이다. 여기 나온 도형, 즉 네 직선과 그 교점들은 고전적인 **완전사변형**(*complete quadrilateral*)이다. 조화분할은 사영에 의해 보존되며, 사영기하학(projective geometry)의 핵심 아이디어 가운데 하나이다. 점을 두 개의 독립인 벡터로 나타내고 계수를 비교하는 습관은 선형대수학(linear algebra)의 출발점이며, 선형대수학에서는 이것이 기저(basis)라는 개념이 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 측면을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.