풀이

STEP I 2010, 문제 6

순수수학 • 계수 내림법

> **STEP I 2010, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

핵심 아이디어

선형 2계 방정식(linear second-order equation)의 해를 하나 알고 있을 때, 일반해를 그 알려진 해와 미지의 함수 u의 곱으로 쓰면 (u의 도함수가 아닌) u 자체를 포함하는 항이 모두 소거된다. 남는 것은 u'과 u''만 포함하므로, 이는 사실상 $v = u'$에 대한 1계 방정식이고, 이 방정식은 변수분리형(separable)이다. 이 기법을 **계수 내림법**(*reduction of order*)이라고 한다.

풀이

$y = \mathrm{e}^x$가 해임을 확인하기

$y = \mathrm{e}^x$이면 $y' = y'' = \mathrm{e}^x$이므로

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

이고, 따라서 $y = \mathrm{e}^x$는 $(*)$를 만족한다.

u에 대한 방정식

$y = u\mathrm{e}^x$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (u' + u)\,\mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.$$

이를 $(*)$의 좌변에 대입하고 인수 e^x를 묶어 내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &e^x[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u] \\ &\quad = e^x[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u] \\ &\quad = e^x[(x-1)u''+(x-2)u']. \end{aligned}$$

u를 포함하는 항들은 $y=e^x$를 확인할 때와 똑같이 소거된다(그 확인은 $u=1$인 경우이다). e^x는 결코 0이 아니므로, $y=ue^x$가 $(*)$를 만족할 필요충분조건은

$$(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}+(x-2)\frac{du}{dx}=0,$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(**)$이다.

v를 구한 뒤 u 구하기

$v=\dfrac{du}{dx}$로 두면 $(**)$는 다음 1계 방정식이 된다.

$$(x-1)\frac{dv}{dx}=-(x-2)\,v.$$

$v=0$은 하나의 해이다. 그렇지 않은 경우, $x\neq 1$이고 $v\neq 0$인 구간에서 변수를 분리하면

$$\int \frac{1}{v}\,dv=-\int \frac{x-2}{x-1}\,dx.$$

? **생각해 보기** $\dfrac{x-2}{x-1}$는 어떻게 적분하는가?

분자를 분모를 이용해 나타낸다. $x-2=(x-1)-1$이므로

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

따라서

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c, \qquad \text{그러므로} \qquad v=C(x-1)e^{-x},$$

이고, 여기서 $C=\pm e^c$이다. $C=0$도 허용하면 해 $v=0$도 포함되므로, 임의의 상수 C에 대해 $v=C(x-1)e^{-x}$이다. (이것이 $x=1$을 포함한 모든 x에서 $(x-1)v'+(x-2)v=0$을 만족함은 직접 쉽게 확인할 수 있다.)

이제 적분하여 u를 구한다. $(x-1)$을 미분하고 e^{-x}를 적분하는 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\begin{aligned} \int (x-1)e^{-x}\,dx &= -(x-1)e^{-x}+\int e^{-x}\,dx \\ &= -(x-1)e^{-x}-e^{-x}=-xe^{-x}. \end{aligned}$$

따라서 $u = -Cxe^{-x} + B$이다. $-C$를 A로 바꾸어 쓰면

$$u = Axe^{-x} + B,$$

이고, 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

마지막 부분

앞에서 u가 $(**)$를 만족하면 $y = ue^x$는 $(*)$를 만족함을 보였다. 우리가 구한 $u = Axe^{-x} + B$는 $(**)$를 만족하는데, 그 도함수 $v = -A(x-1)e^{-x}$가 v에 대한 방정식의 해이기 때문이다. 그러므로

$$y = ue^x = (Axe^{-x} + B)e^x = Ax + Be^x$$

는 임의의 상수 A, B에 대해 $(*)$를 만족하며, 이로써 증명이 끝난다.

검산

$y = x$를 직접 확인해 보자. $y' = 1$, $y'' = 0$이므로 $(*)$의 좌변은 $0 - x + x = 0$이다. $(*)$는 선형이므로, 두 해 x와 e^x의 임의의 결합 $Ax + Be^x$도 해가 된다. 수치로 확인해 보면, $A = 2$, $B = -1$, $x = 0.5$일 때 $y = 1 - e^{0.5} \approx -0.64872$, $y' = 2 - e^{0.5} \approx 0.35128$, $y'' = -e^{0.5} \approx -1.64872$이므로 $(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$이다.

흔한 실수

- 곱의 미분법에 의해 y''에 (u'이 아니라) $2u'$이 나온다는 것을 잊는 실수.
- $\frac{x-2}{x-1}$에서 1을 먼저 떼어 내지 않고 곧바로 로그로 적분하는 실수.
- v를 적분하여 u를 구할 때 적분상수를 빠뜨리는 실수. 바로 그 상수 B가 원래의 해 e^x를 되살려 준다.

STEP 너머

계수 내림법은 임의의 선형 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$에 적용된다. y_1이 하나의 해이면 $y = uy_1$로 두었을 때 항상 u'에 대한 1계 방정식을 얻는다. 론스키안(Wronskian)에 대한 아벨(Abel)의 공식과 함께 쓰면, 해들이 2차원 벡터 공간(vector space)을 이룬다는 것을 보일 수 있다. 따라서 특이점(singular point) $x = 1$을 포함하지 않는 각 구간에서 $Ax + Be^x$는 실제로 이 방정식의 일반해이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.