풀이

STEP I 2010, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP I 2010, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q5

핵심 아이디어

이 합들은 모두 $(1+x)^n$의 이항전개(binomial expansion)가 모습을 바꾼 것으로, 어떤 조작을 한 뒤에 $x=1$을 대입한 값이다. $\binom{n}{k}$ 앞에 붙은 인수 k는 x^k를 미분(differentiate)하면 생기는 것이고, 인수 $\frac{1}{k+1}$은 x^k를 적분(integrate)하면 생기는 것이다. 따라서 항등식

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

을 미분하거나 적분한 다음 $x=1$을 대입하면 된다. k^2의 경우에는 두 번 미분해야 하며, 그 사이에 x를 한 번 곱해 준다.

풀이

이 풀이 전체에서 n은 양의 정수이고,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. 양변이 모두 다항식(polynomial)이므로 항별로 미분하거나 적분해도 항등식은 그대로 성립한다.

소문항 (i)

$(*)$에 $x=1$을 대입한다. 좌변은 2^n이 되고 각 x^k는 1이 되므로

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$(*)$를 x에 대하여 미분한다. 상수항은 사라지고 $\binom{n}{k}x^k$는 $k\binom{n}{k}x^{k-1}$이 된다.

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

$x = 1$을 대입하면

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

이번에는 $\binom{n}{k}$를 $k+1$로 나눈 값이 필요한데, 이는 $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$에서 얻을 수 있다. $(*)$를 0부터 1까지 적분하면 좌변은

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

이고 우변은

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

이다. 따라서

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 아래끝이 중요하다는 점에 주의한다. -1은 0부터 적분하기 때문에 생기는 것이다.

소문항 (iv)

> ? **생각해 보기** $(**)$를 그대로 한 번 더 미분하면 계수가 k^2이 아니라 $k(k-1)$이 된다. 어떻게 하면 k^2을 얻을 수 있을까?

두 번째로 미분하기 전에 $(**)$에 x를 곱한다. 그러면 $k\binom{n}{k}$와 함께 거듭제곱 x^k가 되살아나므로, 다음 미분에서 정확히 k라는 인수가 하나 더 내려온다.

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

좌변에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

이다. ($n=1$일 때 좌변의 둘째 항은 인수 $n-1=0$을 가지므로 그냥 없는 것이 되며, 항등식은 여전히 성립한다.) 이제 $x=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}(2+(n-1))\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

다른 방법으로 $k^2=k(k-1)+k$로 쓸 수도 있다. $(*)$를 두 번 미분하고 $x=1$을 대입하면 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$를 얻고, 여기에 소문항 (ii)의 결과를 더하면 같은 답이 나온다.

검산

계수가 $1,3,3,1$인 $n=3$의 경우를 보자.

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$.
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$.
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$.
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$.

또한 1부터 40까지의 모든 n에 대하여 네 항등식을 분수로 정확히 계산하여 확인하였다.

흔한 실수

- (iii)에서 아래끝에서 나오는 값을 빠뜨려 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$을 얻는 실수.
- (iv)에서 $(**)$를 바로 미분하여 $\sum k^2\binom{n}{k}$가 아니라 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$를 얻는 실수.

STEP 너머

이 항등식들은 확률적인 의미를 가진다. 공정한 동전을 n번 던져 나온 앞면의 개수를 X라 하면 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$이므로, 소문항 (ii)는 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$를, 소문항 (iv)는 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$를 뜻하며, 이로부터 $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$를 얻는다. 생성함수(generating function)를 미분하여 적률(moment)을 뽑아내는 것은 대학 1학년 과정의 표준적인 기법이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이를 제대로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.