풀이

# STEP I 2010, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2010, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q4

## 핵심 아이디어

치환은 $x$와 $x+1$이 모두 같은 분모 $t^2-1$을 갖는 간단한 분수가 되도록 고른 것이며, 그 덕분에 두 식의 곱의 제곱근이 정확히 계산된다. 그러면 적분은 주어진 참고 사항의 표준적인 적분으로 바뀐다. 부피를 구할 때는 $y$를 제곱하면 쉬운 로그 두 개와 교차항(cross term)이 나오는데, 이 교차항이 바로 방금 구한 적분이다.

## 풀이

### 적분

$x>0$이라 하자. $t>1$인 치환(substitution) $x=\dfrac{1}{t^2-1}$은 정당하다. $t$에 대하여 풀면

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

이고, $t$가 $(1,\infty)$ 전체를 움직일 때 $x$는 (감소하면서) $(0,\infty)$ 전체를 움직이며, 각 $t$에 대하여 $x$의 값이 하나씩 대응한다.

이제

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1}, \qquad \text{따라서} \qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

$t>1$이므로 $t$와 $t^2-1$은 모두 양수이고, 따라서

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

? **생각해 보기** 제곱근을 구할 때 왜 $t>1$이 필요했는가?

제곱근은 결코 음수가 아니므로 $\sqrt{t^2/(t^2-1)^2} = |t|/|t^2-1|$이다. 조건 $t > 1$ 덕분에 두 절댓값 기호를 모두 없앨 수 있다. 이것은 이 선택의 이유도 설명해 준다. $t^2 - 1 > 0$이 바로 $x > 0$이 되게 하는 조건이다.

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + c,\end{aligned}$$

여기서 $a = 1$일 때의 참고 사항과, $t > 1$이면 $(t-1)/(t+1)$이 양수라는 사실을 이용하였다.

이제 $t = \sqrt{x+1}/\sqrt{x}$를 이용하여 $x$로 되돌아가자. 분자와 분모에 $\sqrt{x}$를 곱하면

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

이며, 여기서는 분자와 분모에 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$를 곱하고 제곱의 차(difference of two squares) 공식을 이용하였다. 따라서

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + c,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

### 부피

$\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$이면 $1/\sqrt{x} > 1/\sqrt{x+1}$이므로, $x > 0$에서 곡선은 $y > 0$이다. 따라서 곡선과 $x$축 사이의 영역을 회전시켜 생기는 부피(volume)는 $V = \pi\int y^2\,\mathrm{d}x$이다. 전개하면

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

이고, 마지막 항은 앞부분 피적분함수의 두 배이다. 따라서

$$V = \pi\Big[\ln x + \ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16} - 2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

적분 구간의 끝값은 제곱근이 깔끔하게 나오도록 정해져 있다.

- $x = \frac{9}{16}$일 때: $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$, $\sqrt{x+1} = \frac{5}{4}$, 합은 2이고, $x(x+1) = \frac{225}{256}$이다.
- $x = \frac{1}{8}$일 때: $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{x+1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, 합은 $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$이고, $x(x+1) = \frac{9}{64}$이다.

첫 번째 괄호는

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

이고, 두 번째 괄호는

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

그러므로

$$V = \pi \ln \frac{25}{4} - 2\pi \ln 2 = \pi \ln \frac{25}{4} - \pi \ln 4 = \pi \ln \frac{25}{16} = 2\pi \ln \frac{5}{4},$$

이고, 이것이 원하던 결과이다.

## 검산

- 답을 미분해 본다.

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  괄호 안의 식이 $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$와 같기 때문이다.

- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\pi \int_{1/8}^{9/16} y^2 \,\mathrm{d}x \approx 1.402052$이고, 이는 $2\pi \ln \frac{5}{4} \approx 1.402052$와 일치한다. 심프슨 공식으로 $\int_{1/8}^{9/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$도 확인할 수 있다.

## 흔한 실수

- $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리는 것. 이 부호가 $\ln \frac{t-1}{t+1}$을 $\ln \frac{t+1}{t-1}$로 바꾸어 준다.
- $y^2$을 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$로 전개하는 것. 교차항 $-2/\sqrt{x(x+1)}$이야말로 앞부분의 핵심이다.
- 부피 공식에서 인수 $\pi$를 빠뜨리거나 $\pi$ 대신 $2\pi$를 쓰는 것.

## STEP 너머

답 $2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$은 사실 $2\,\mathrm{arsinh}\,\sqrt{x}$이다. $\mathrm{arsinh}\,u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$이기 때문이다. 치환 $x = \sinh^2\theta$를 쓰면 한 줄 만에 같은 결과를 얻는다. 제곱근을 유리화하는 치환을 고르는 것은 체계적인 기법(오일러 치환(Euler substitutions))이며, $x$와 $\sqrt{ax^2+bx+c}$의 유리함수(rational function)의 적분은 모두 초등함수(elementary functions)로 계산할 수 있다는 결과의 바탕이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이와 같은 정신의 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.