풀이

STEP I 2010, 문제 3

순수수학 • 합을 곱으로 바꾸는 공식

> **STEP I 2010, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q3

핵심 아이디어

사인(또는 코사인)의 차를 곱으로 바꾸어 주는 것이 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)이다. 매개변수(parameter)가 u와 v인 두 점을 잇는 타원(ellipse)의 현(chord)은 기울기(gradient)가 $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$이다. 분자와 분모가 모두 차의 꼴이므로 이 공식으로 각각을 인수분해할 수 있고, 공통인수가 약분되면 기울기는 **합** $u+v$에만 의존하게 된다. 그러면 두 현을 비교하는 문제는 두 코탄젠트(cotangent)를 비교하는 문제로 바뀐다.

풀이

삼각함수 항등식

덧셈정리(compound-angle formulae)를 이용하면

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y)\\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 이제 임의의 A와 B에 대하여 $x = \frac{1}{2}(A+B), y = \frac{1}{2}(A-B)$로 놓으면 $x+y = A, x-y = B$이다. 그러면 항등식은 다음과 같이 된다.

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

같은 방법으로

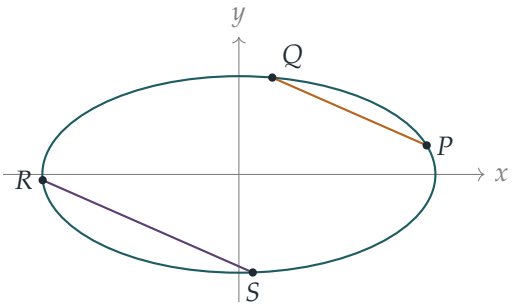
$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y)\\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

이고, 같은 치환을 하면 다음을 얻는다.

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

평행한 현

네 점은 모두 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있고, 시계 반대 방향으로 P, Q, R, S의 순서로 놓여 있다. 그림은 $a=2, b=1$일 때 평행한 현의 쌍을 보여 준다.



현의 기울기. $[0,2\pi)$에 속하는 두 매개변수 $u < v$를 잡되, $(a\cos u, b\sin u)$와 $(a\cos v, b\sin v)$를 지나는 현이 수직이 아니도록, 즉 $\cos v \neq \cos u$가 되도록 한다. 두 항등식에 $A=v$, $B=u$를 대입하면 이 현의 기울기는

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)} = \frac{2b\cos\tfrac{1}{2}(u+v)\,\sin\tfrac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\tfrac{1}{2}(u+v)\,\sin\tfrac{1}{2}(v-u)} = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

이다. 이 약분은 정당하다. $0<v-u<2\pi$이므로 $\frac{1}{2}(v-u)$는 0과 π 사이에 엄격히 놓이고, 따라서 $\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$이다. 또 원래의 분모가 0이 아니므로 $\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$이기도 하여, 코탄젠트가 정의된다.

$\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$, $\beta=\frac{1}{2}(r+s)$로 놓자. PQ와 SR 모두 수직이 아니므로

$$\text{기울기}PQ = -\frac{b}{a}\cot\alpha, \qquad \text{기울기}SR = -\frac{b}{a}\cot\beta,$$

이고, $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$이다. 수직이 아닌 두 직선은 기울기가 같을 때, 그리고 그때에만 평행하며, $b/a\neq 0$이므로

$$PQ \parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

이다.

? **생각해 보기** 왜 그냥 "cot을 지워서" $\alpha=\beta$라고 결론 내릴 수 없을까?

cot은 일대일(one-to-one)이 아니기 때문이다. cot은 주기(period) π로 같은 값을 되풀이한다. 이 점을 놓치지 않기 위해 차를 하나의 사인으로 나타내자.

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

분모가 0이 아니므로

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha) = 0 \iff \beta - \alpha = k\pi \text{ , 정수}k.$$

이다.

k 정하기. 다음이 성립한다.

$$\beta - \alpha = \tfrac{1}{2}[(r-p)+(s-q)].$$

$p < r$이고 $q < s$이므로 두 괄호는 모두 양수이고, 따라서 $\beta - \alpha > 0$이다. 네 매개변수가 모두 $[0, 2\pi)$에 속하므로 각 괄호는 2π보다 작고, 따라서 $\beta - \alpha < 2\pi$이다. 0과 2π 사이에 엄격히 놓이는 π의 배수는 π 자신뿐이므로 $k = 1$이다. 그러므로

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q) = \pi \iff r+s-p-q = 2\pi.$$

이다. 모든 단계가 동치(equivalence)이므로, 요구된 대로 양방향이 모두 증명된다.

(두 직선은 결코 일치할 수 없다. 직선은 타원과 많아야 두 점에서 만나는데, P, Q, R, S는 서로 다른 네 점이기 때문이다. 따라서 여기서 "평행"은 서로 다르면서 진짜로 평행하다는 뜻이다.)

검산

- $p = 0, q = \frac{\pi}{2}, r = \pi, s = \frac{3\pi}{2}$로 잡으면 $r+s-p-q = 2\pi$이다. 이때 $P = (a, 0)$, $Q = (0, b)$, $R = (-a, 0)$, $S = (0, -b)$이고, PQ와 SR의 기울기는 모두 $-b/a$이다. $a = 2$, $b = 1$이면 두 기울기 모두 -0.5가 나온다.
- 대칭성: 조건은 $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(p+q) + \pi$라는 뜻이다. 사상 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$는 매개변수에 π를 더하는 것이고, 현 PQ를 반 바퀴 회전하면 평행한 현이 되므로 결과와 잘 맞는다.
- 수치적으로, 임의의 a, b와 임의의 $p < q < r < s$를 잡아 확인하면, $r+s-p-q = 2\pi$인 경우(직접 만든 예 약 5000개)에는 기울기가 정확히 일치했고 그 밖의 경우에는 한 번도 일치하지 않았다.

흔한 실수

- $\cot\alpha = \cot\beta$에서 곧바로 $\alpha = \beta$로 넘어가는 것. 그러면 $r+s = p+q$가 되는데, 이는 여기서 불가능하다. cot의 주기가 바로 이 문제의 핵심이다.

- $\sin\frac{1}{2}(v-u)$를 약분할 수 있는 이유를 밝히지 않거나, 순서 $p<q<r<s$를 이용해 $k=0$과 $k=2$를 배제하지 않는 것.

STEP 너머

타원을 $(a\cos t, b\sin t)$로 나타내면, 타원은 단위원을 늘이기(stretch) $(x,y)\mapsto(ax,by)$로 옮긴 상임을 알 수 있다. 이와 같은 선형사상(linear map)은 평행한 직선을 평행한 직선으로 보내므로, 이 문제는 사실 원에 관한 문제이다. 원에서는 각 p에서 각 q까지의 현이 각 $\frac{1}{2}(p+q)$의 반지름과 수직이므로, 결과는 거의 자명해진다. 사상이 보존하는 성질을 이용해 문제를 단순하게 만드는 이런 아이디어는 선형대수와 기하학 전반에 걸쳐 나타난다. 선형사상이 실제로 작동하는 모습을 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 삼각함수 항등식을 다루는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.