풀이

STEP I 2010, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2010, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q2

핵심 아이디어

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하고, 결코 0이 되지 않는 인수 e^x를 묶어 낸다. 그러면 정류점(stationary point)은 어떤 이차식의 근이 되므로, "정류점이 두 개"라는 말은 그 이차식의 판별식(discriminant)에 대한 명제가 된다. 그래프를 그릴 때는 바로 그 이차식의 부호가 곡선이 어디서 증가하고 어디서 감소하는지 알려 주고, 점근선(asymptote) 근처와 $x \to \pm\infty$일 때의 거동이 나머지를 채워 준다.

풀이

$x \neq b$에서 정의된 $y = \dfrac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x$를 생각한다. 곱의 미분법(product rule)에 의해, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x[(x-a)(x-b)+(a-b)]}{(x-b)^2}.$$

$x \neq b$에서 $\mathrm{e}^x > 0$이고 $(x-b)^2 > 0$이므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호는

$$q(x) = (x-a)(x-b)+(a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

의 부호와 같고, 정류점은 정확히 $x = b$가 아닌 q의 근들이다.

> ? **생각해 보기** 곡선이 정의되지 않는 $x = b$에 q의 근이 놓일 수 있을까?

이것은 문제가 되지 않는다. $q(b) = a - b$이므로 $x = b$가 근이 되는 것은 $a = b$일 때뿐이다. 그런데 그 경우 곡선은 ($x = b$에 구멍이 뚫린) $y = \mathrm{e}^x$일 뿐이고, 이 곡선에는 정류점이 전혀

없다. 따라서 어떤 경우든 정류점은 정확히 q의 실근들이며, 정류점이 두 개인 것은 q가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 판별식이 양수일 때와 정확히 같다.

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

두 인수의 곱이 양수인 것은 두 인수가 모두 양수이거나 모두 음수일 때이다. 둘 다 음수이면 $a-b<0$이고, 둘 다 양수이면 $a-b>4$이다(이때 이미 $a-b>0$이 성립한다). 그러므로 정류점이 두 개이려면

$$a-b<0 \quad \text{또는} \quad a-b>4,$$

이어야 하며, 이것이 보이려던 것이다. (역으로, 두 조건 중 어느 것이든 정류점 두 개를 준다.)

소문항 (i)

$a=0, b=\frac{1}{2}$이면 $a-b=-\frac{1}{2}<0$이고,

$$y = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x) = x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} = (x-1)(x+\tfrac{1}{2}).$$

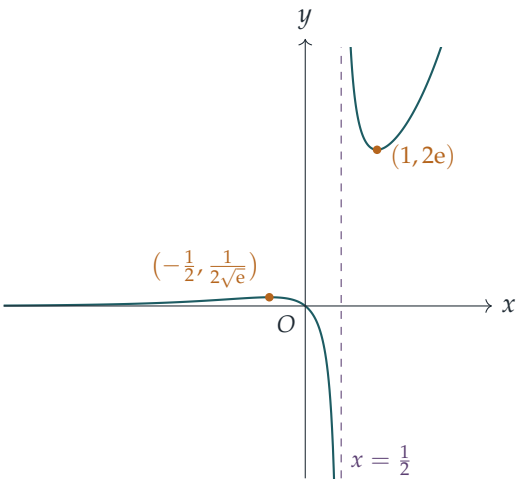
정류점은 $x=-\frac{1}{2}$와 $x=1$에 있으며, 문제에서 요구한 대로 수직 점근선 $x=\frac{1}{2}$의 양쪽에 하나씩 있다. 이 점들의 y값은

$$y(-\tfrac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0.30, \qquad y(1) = \frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e} \approx 5.44.$$

$x<-\frac{1}{2}$에서 $q>0$, $-\frac{1}{2}<x<1 (x\neq\frac{1}{2})$에서 $q<0$, $x>1$에서 $q>0$이므로, 점 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}})$은 극대점(local maximum)이고 $(1, 2\mathrm{e})$는 극소점(local minimum)이다.

그 밖의 특징:

- $x\to-\infty$일 때 $\frac{x}{x-1/2}\to 1$이고 $\mathrm{e}^x\to 0$이므로 $y\to 0$이다. $x<0$에서는 x와 $x-\frac{1}{2}$가 모두 음수이므로 $y>0$이다. 즉 곡선은 음의 x축에 위쪽에서 다가간다.
- 곡선은 원점에서만 좌표축과 만나고, $0<x<\frac{1}{2}$에서 $y<0$이다.
- $x\to\frac{1}{2}^-$일 때 $y\to-\infty$이고, $x\to\frac{1}{2}^+$일 때 $y\to+\infty$이다 (분자는 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$으로 수렴한다).
- $x\to\infty$일 때 $y\to\infty$이며, e^x처럼 증가한다.



소문항 (ii)

$a = \frac{9}{2}, b = 0$이면 $a - b = \frac{9}{2} > 4$이므로, 이번에도 정류점이 두 개 있다. 이제

$$y = \frac{x - \frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x) = x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{9}{2} = \tfrac{1}{2}(2x - 3)(x - 3),$$

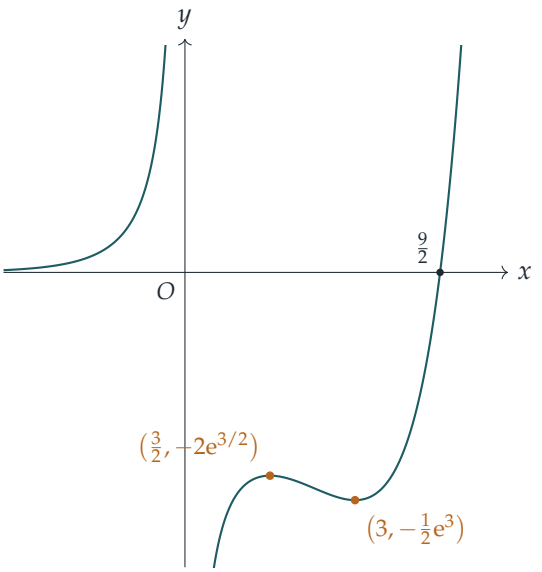
이므로 정류점은 $x = \frac{3}{2}$와 $x = 3$에 있고, 둘 다 점근선 $x = 0$의 오른쪽에 있다. 이 점들의 y값은

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2} = -2\mathrm{e}^{3/2} \approx -8.96, \qquad y(3) = \frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 \approx -10.04.$$

q의 부호는 $x < \frac{3}{2} (x \neq 0)$에서 양, $(\frac{3}{2}, 3)$에서 음, $x > 3$에서 양이므로, $(\frac{3}{2}, -2\mathrm{e}^{3/2})$은 극대점이고 $(3, -\frac{1}{2}\mathrm{e}^3)$은 극소점이다. 두 점이 모두 x축 아래에 있고, 극소점이 극대점보다 아주 조금만 낮으므로 그 사이의 움푹 들어간 부분은 얕다는 점에 주의한다.

그 밖의 특징:

- $x \to -\infty$일 때 $y \to 0$이다. $x < 0$에서는 $x - \frac{9}{2}$와 x가 모두 음수이므로 $y > 0$이다. $x < 0$에서 곡선은 증가하며(그곳에서 $q > 0$이므로), 축 바로 위에서부터 점근선을 향해 올라간다.
- $x \to 0^-$일 때 $y \to +\infty$이고, $x \to 0^+$일 때 $y \to -\infty$이다(분자는 $-\frac{9}{2}$로 수렴한다).
- 절편은 $(\frac{9}{2}, 0)$뿐이다. $(0, \frac{9}{2})$에서 $y < 0$이고 $x > \frac{9}{2}$에서 $y > 0$이며, $x \to \infty$일 때 $y \to \infty$이다.



여기서는 y축 자체가 수직 점근선이다.

검산

- 임의의 (a, b, x)에서 y의 수치 미분값은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 공식과 일치하고, 임의의 (a, b)에 대해 q의 부호 변화를 세어 보면 정류점이 두 개인 것은 정확히 $a - b < 0$ 또는 $a - b > 4$일 때이다.
- (i)에서 $y(1) = 5.4366 = 2\mathrm{e}$이고 $y(-\frac{1}{2}) = 0.3033$이며, (ii)에서 $y(\frac{3}{2}) = -8.9634$이고 $y(3) = -10.0428$이다. 각 점의 바로 양옆 값을 계산해 보면 극대인지 극소인지 확인된다.
- 조건에 대한 상식적 검토: (i)에서 $a - b = -\frac{1}{2}$, (ii)에서 $a - b = \frac{9}{2}$로, 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 허용 범위 안에 있다.

흔한 실수

- 판별식이 $(a - b)^2 - 4(a - b)$임을 알아차리지 못하고 그냥 전개하는 것. $a - b$에 대한 식으로 쓰면 깔끔하게 인수분해된다.
- q의 근이 점근선 $x = b$ 위에 올 수 없음을 확인하는 것을 잊는 것.
- (ii)에서 극대점과 극소점을 x축의 서로 반대쪽에 그리는 것. 두 점 모두 x축 아래에 있으며, 곡선은 $x = \frac{9}{2}$에서만 축과 만난다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 도함수의 부호와 극한으로부터 곡선의 모양을 읽어 내는 방법은 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 평균값 정리(Mean Value Theorem)(어떤 구간에서 도함수가 양수이면 정말로 증가한다는 것)와 무한대에서의 극한에 대한 엄밀한 정의를 통해 엄밀하게 다듬어진다. $x \to \pm\infty$일 때 e^x가 어떤 유리함수(rational function)보다도 압도적이라는 사실도 그곳에서 증명되는 표준적인 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 모든 내용을 훌륭하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.