풀이

STEP I 2010, 문제 11

역학 • 원 위에서의 충돌

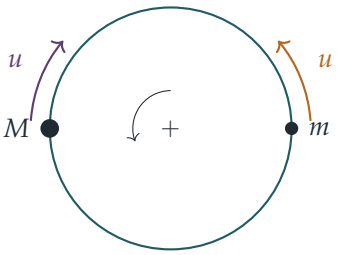
> **STEP I 2010, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q11

핵심 아이디어

입자들은 원 위를 움직이지만, 각 충돌은 공통 접선(common tangent)을 따라 일어나는 평범한 1차원 충돌이다. 매끄러운 홈은 운동 방향에 수직으로만 힘을 가하므로 속력을 바꿀 수 없고 접선 방향의 충격량(impulse)에도 영향을 주지 않는다. 따라서 원을 따라 잰 **부호 있는** 속도를 써서 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 적용한다. 그러고 나면 두 가지 사실이 모든 정보를 담는다. 부호 있는 운동량의 총합은 결코 변하지 않고, 상대 속력(relative speed)은 충돌할 때마다 e배가 된다.

풀이

입자들을 매끄러운 수평 홈 안의 점으로 모형화한다. 반시계 방향을 양의 방향으로 잡고, 처음에 m은 반시계 방향으로 속력 u, M은 시계 방향으로 속력 u로 움직인다고 하자. 그러면 두 입자의 부호 있는 속도는 u와 $-u$이다.



충돌과 충돌 사이에 각 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 매끄러운 홈의 수직항력(normal reaction)뿐이며, 이 힘은 속도에 수직이다. 이 힘은 일을 하지 않으므로 각 입자는 일정한 속력을 유지한다. 충돌할 때 두 입자가 서로에게 가하는 충격량은 공통 접선을 따라 작용하

고, 크기가 같고 방향이 반대이며, 홈은 접선 방향의 충격량을 주지 않는다. 따라서 각 충돌에서 원을 따라 잰 부호 있는 운동량의 총합은 변하지 않고, 뉴턴의 법칙은 부호 있는 속도에 대해 성립한다.

첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 후의 부호 있는 속도를 p(m의 속도)와 q(M의 속도)라 하자. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙에서

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

$q = p + 2eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$이므로

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

따라서 첫 번째 충돌 후의 속력은 다음과 같다.

$$\text{속력}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{속력}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

? **생각해 보기** 어떤 부호가 입자의 운동 방향이 바뀌었음을 뜻하는가?

입자 m은 양의 방향으로 움직이고 있었으므로, $p < 0$일 때 그리고 그때에만 방향이 바뀐다. $M > m$이고 $e \geq 0$이므로 괄호 $M - m + 2eM$은 양수이고, 따라서 m은 **항상** 방향이 바뀐다. 입자 M은 음의 방향으로 움직이고 있었으므로, $q > 0$일 때 그리고 그때에만 방향이 바뀐다. 즉

$$2em > M - m.$$

일 때이다. 따라서 이 조건 아래에서 요구한 대로 두 입자 모두 방향이 바뀐다.

그 뒤 $2n$번 더 충돌한 후

$mv - MV = u(M-m)$인 이유. 처음의 부호 있는 운동량의 총합은 $mu - Mu = -u(M-m)$이다. 충돌은 이 값을 보존하고, 충돌과 충돌 사이에는 속력이 변하지 않으므로 이 값은 언제까지나 유지된다.

두 입자는 충돌할 때마다 방향이 바뀌므로, 첫 번째 충돌 후 m은 시계 방향, M은 반시계 방향으로 움직이고, 이후 충돌할 때마다 이 방향이 서로 뒤바뀐다. 그 뒤 $2n$번 더 충돌하면 모두 $2n+1$번, 곧 홀수 번 충돌한 것이므로, m은 다시 시계 방향, M은 반시계 방향으로 움직인다. 두 입자의 부호 있는 속도는 $-v$와 V이고

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

상대 속력. 각 충돌 후 두 입자는 원을 따라 서로 반대 방향으로 일정한 속력으로 멀어지고, 다음에는 반대편에서 만나는데, 이때 서로 접근하는 상대 속력은 멀어질 때의 상대 속력과 같다. 뉴턴의 법칙에 따르면 충돌 후 멀어지는 속력은 충돌 전 접근하는 속력의 e배이다. 처음 접근하는 속력은 $2u$이므로, $2n+1$번 충돌한 후 멀어지는 속력은 $2ue^{2n+1}$이다. 두 입자는 서로 반대 방향으로 움직이므로 이 값은 $v+V$이다.

$$v+V=2ue^{2n+1}.$$

연립하여 풀기. 두 번째 식에 M을 곱하여 첫 번째 식에 더하면

$$(m+M)v=u(M-m)+2Mue^{2n+1},$$

이고, 두 번째 식에 m을 곱한 것에서 첫 번째 식을 빼면

$$(m+M)V=2mue^{2n+1}-u(M-m).$$

이다. 따라서

$$v=\frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m},\qquad V=\frac{u\big(2me^{2n+1}-(M-m)\big)}{M+m}.$$

검산

- $n=0$을 대입하면 앞에서 구한 첫 번째 충돌 후의 속력이 다시 나온다.
- $m=2$, $M=3$, $e=0.8$, $u=1$일 때, 공식은 $n=0$이면 $(v,V)=(1.16,\,0.44)$, $n=1$이면 $(0.8144,\,0.2096)$을 준다. 입자들이 원을 돌며 충돌하는 과정을 한 단계씩 시뮬레이션하면, 1번째와 3번째 충돌 후에 정확히 이 값들이 나온다.
- 운동 에너지(kinetic energy)는 증가하지 않아야 한다. $e=1$이면 $v=u\,\frac{3M-m}{M+m}$이고 $V=u\,\frac{3m-M}{M+m}$이며, $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}(m+M)u^2$임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 속력과 속도를 혼동하는 것. 뉴턴의 법칙과 운동량 보존은 부호 있는 속도로 써야 한다. 속력으로 바꾸는 것은 맨 마지막에만 한다.
- $2n$번 더 충돌한다는 것이 모두 $2n+1$번 충돌한다는 뜻임을 잊는 것. 이 때문에 거듭제곱은 e^{2n}이 아니라 e^{2n+1}이 된다.
- 홈이 주는 구심력(centripetal force)을 걱정하는 것. 이 힘은 운동 방향에 수직이므로 속력을 바꾸지도 않고 충돌 방정식에 들어가지도 않는다.

STEP 너머

V의 공식을 보면, $e < 1$일 때 주어진 가정이 영원히 유지될 수는 없음을 알 수 있다. $2me^{2n+1}$이 $M - m$보다 작아지는 순간 무거운 입자는 더 이상 방향을 바꾸지 않는다. 여기서 운동량은 회전의 의미에서만 보존된다. 홈의 힘은 항상 중심을 향하므로, 실제로 보존되는 양은 중심에 대한 **각운동량**(angular momentum)이며, 원의 반지름은 소거된다. 이처럼 대칭성에서 나오는 보존 법칙은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 각운동량과 충돌을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.