풀이

STEP I 2010, 문제 10

역학 • 벡터 운동학

> **STEP I 2010, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q10

핵심 아이디어

모든 것은 $\mathbf{r}$을 미분(differentiate)하고 내적(dot product)을 계산하는 데서 나온다. 두 벡터 사이의 각은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$에서 얻고, 수직(perpendicular)이라는 것은 내적이 0이라는 뜻이다. 두 번째 입자에 대해서는 시각 t에서 Q의 위치가 정확히 시각 $t-T$에서 P가 있던 위치라는 관찰이 유용하다. 위치를 복소수(complex number) $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$로 쓰면 마지막 부분은 한 줄짜리 계산이 된다.

풀이

속도와 가속도

$\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t))\\ &= \mathrm{e}^t(-2\sin t,\ 2\cos t).\end{aligned}$$

속도와 변위 사이의 각

크기는 $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$이고

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

이다. 교차항 $\mp 2\sin t\cos t$가 상쇄되기 때문이다. 따라서 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$이다. 내적은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

이다. 그러므로 θ를 $\mathbf{r}$과 $\mathbf{v}$ 사이의 각이라 하면

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{e^{2t}}{e^t\cdot\sqrt{2}\,e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

이므로, 요구한 대로 모든 t에 대하여 $\theta = \frac{\pi}{4}$이다. ($e^t > 0$이므로 두 벡터 모두 결코 영벡터가 되지 않고, 따라서 각은 항상 정의된다.)

가속도는 변위에 수직이다

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = e^{2t}[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t] = 0,$$

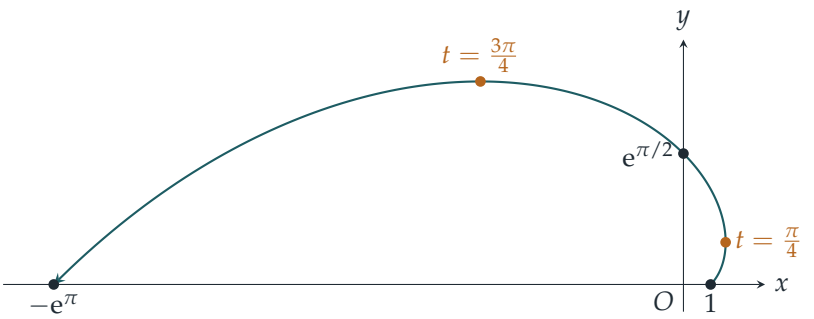
이고 두 벡터 모두 영벡터가 아니므로, $\mathbf{a}$는 항상 $\mathbf{r}$에 수직이다. 또한 $\mathbf{a} = 2e^t(-\sin t, \cos t)$는 $\mathbf{r}$을 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키고 두 배로 늘인 것임에 주목하자.

$0 \le t \le \pi$에서의 경로

극좌표(polar coordinates)로 나타내면 경로는 $\theta = t$일 때 $r = e^\theta$이다. 즉 입자가 시계 반대 방향으로 돌면서 O로부터의 거리가 지수적으로 커지는 **등각** 나선(equiangular spiral), 곧 로그 나선(logarithmic spiral)이다. 유용한 기준점은 다음과 같다.

- $t = 0$: 점 $(1,0)$에서 방향 $(1,1)$로, 즉 x축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이루며 움직인다.
- $t = \frac{\pi}{4}$: $\dot{x} = e^t(\cos t - \sin t) = 0$이므로 x가 최대이고, 그 점은 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$이다.
- $t = \frac{\pi}{2}$: 점 $(0, e^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$.
- $t = \frac{3\pi}{4}$: $\dot{y} = e^t(\sin t + \cos t) = 0$이므로 y가 최대이고, 그 점은 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$이다.
- $t = \pi$: 점 $(-e^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$에서 축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이루며 왼쪽 아래 방향으로 축을 가로지른다.

모든 점에서 경로는 O로부터의 동경과 $\frac{\pi}{4}$의 각으로 만나며, 이것이 경로의 모양을 결정한다.



두 번째 입자

생각해 보기 시각 t에서 Q는 P의 운동으로 나타내면 어디에 있는가?

Q는 각 점에 P보다 T만큼 늦게 도달하므로, 시각 t에서 Q는 시각 $t-T$에 P가 있던 곳에 있다.

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = \mathrm{e}^{t-T}\big(\cos(t-T),\ \sin(t-T)\big).$$

그러면

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T)\\ &= \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t-2T} - 2\mathrm{e}^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big)\\ &= \mathrm{e}^{2t}\big(1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}\big),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$를 이용하였다. 따라서

$$|PQ| = k\,\mathrm{e}^{t}, \qquad k = \sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}},$$

이고, k는 t가 아니라 T에만 의존한다. 그러므로 요구한 대로 P와 Q 사이의 거리는 e^t에 비례한다. (괄호 안의 식은 $|1-\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}|^2$이고, $T\neq 0$이면 $\mathrm{e}^{-T}\neq 1$이므로 양수이다. 따라서 $k>0$이다.)

복소수를 이용한 풀이. $z = x+\mathrm{i}y$라 하면 P는 $z_P = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$에, Q는 $z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(t-T)}$에 있다. 따라서

$$z_P - z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big(1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = \mathrm{e}^t\,\big|1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big|.$$

이것은 또한 $\overrightarrow{QP}$가 z_P의 고정된 복소수배임을 보여 주므로, 선분 PQ는 OP와 일정한 각을 이룬다. 즉 삼각형 OQP는 같은 모양을 유지한 채 커지고 회전할 뿐이다.

검산

- $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$를 미분하면 $\dot z = (1+\mathrm{i})z$와 $\ddot z = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$를 얻는다. $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시키는 것이고, $2\mathrm{i}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키는 것이다. 처음 두 결과를 한눈에 알 수 있다.
- 수치적으로 임의의 t에 대하여 $\mathbf{r}$과 $\mathbf{v}$ 사이의 각은 $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$로 나왔고 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$이었다. $T=1$일 때 확인한 모든 t에서 $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$였으며, 이는 $\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{-2}}$와 일치한다.
- $T\to 0$일 때 $k\approx T\sqrt{2}$이므로 $|PQ|\approx\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$이고, 이는 마땅히 그래야 하듯 시간 T 동안 이동한 거리이다.

흔한 실수

- Q의 위치를 $\mathbf{r}(t+T)$로 잡는 것. Q는 P의 뒤에 있으므로 $\mathbf{r}(t-T)$에 있다. (이 경우에도 답은 e^t에 비례하지만 상수가 달라진다.)
- 시계 방향으로 도는 나선을 그리거나 경로가 원점을 지나도록 그리는 것. O로부터의 거리는 $\mathrm{e}^t \geq 1$이며 입자가 시계 반대 방향으로 움직일수록 커진다.

STEP 너머

곡선 $r = \mathrm{e}^\theta$는 로그 나선이다. 이 곡선을 O를 중심으로 확대하거나 축소한 것은 모두 이 곡선을 회전한 것과 같으며, 바로 이 때문에 만나는 각이 일정하고 OQP가 모양을 유지한다. 대학 1학년 과정에서는 평면 운동을 흔히 극좌표 단위벡터 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$로 다루는데, 여기서는 동경 방향 가속도 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$이 0이 되어 수직성이 바로 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 종류의 문제를 위해 극좌표를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.