풀이

STEP I 2010, 문제 1

순수수학 • 완전제곱식 만들기

> **STEP I 2010, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q1

핵심 아이디어

주어진 항등식(identity)은 다루기 까다로운 이차식을 두 제곱의 합에 상수를 더한 꼴로 바꾸어 쓴다. 두 번째 방정식도 **같은** 두 괄호 $x-y+2$와 $2x-y$를 써서 나타낼 수 있다는 것을 알아차리면, 문제는 두 개의 새로운 미지수에 대한 간단한 방정식 두 개로 바뀐다. 이 방정식들은 새 미지수의 제곱에 대하여 일차이므로 곧바로 풀 수 있다.

풀이

항등식

우변을 전개하면

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad = a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad = (a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

이것은 항등식이므로 $5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y$와 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있다.

$$\begin{aligned}
x: &\quad 4a = 4, && \text{따라서} a = 1;\\
y: &\quad -4a = -4, && \text{일치한다;}\\
y^2: &\quad a + b = 2, && \text{따라서} b = 1;\\
xy: &\quad 2bc - 2a = -6, && \text{따라서} 2c = -4,\ c = -2;\\
x^2: &\quad a + bc^2 = 5, && \text{확인: } 1 + 4 = 5;\\
\text{상수항}: &\quad 4a + d = 0, && \text{따라서} d = -4.
\end{aligned}$$

x^2의 계수만으로는 $c^2 = 4$밖에 얻지 못한다는 점에 주의하자. 부호를 결정하는 것은 xy의 계수이다. 따라서

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = -2, \qquad d = -4,$$

즉

$$5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y \equiv (x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 4,$$

이다. 여기서 $(-2x + y)^2$을 $(2x - y)^2$으로 썼다.

연립방정식

항등식에 의해 첫 번째 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 13.$$

생각해 보기 두 번째 방정식은 생김새가 다르다. 이것도 같은 두 괄호를 써서 나타낼 수 있을까?

두 번째 방정식에서 x와 y의 일차항은 $8x - 8y$로, 첫 번째 방정식의 일차항의 두 배이다. 그러므로 일차항이 꼭 맞는 $2(x - y + 2)^2$을 시도해 볼 만하다.

$$2(x - y + 2)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y + 8.$$

좌변의 나머지 부분은

$$6x^2 + 3y^2 - 8xy + 8x - 8y - 2(x - y + 2)^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy - 8 = (2x - y)^2 - 8.$$

이다. 따라서 두 번째 방정식은 $2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 8 = 14$, 즉

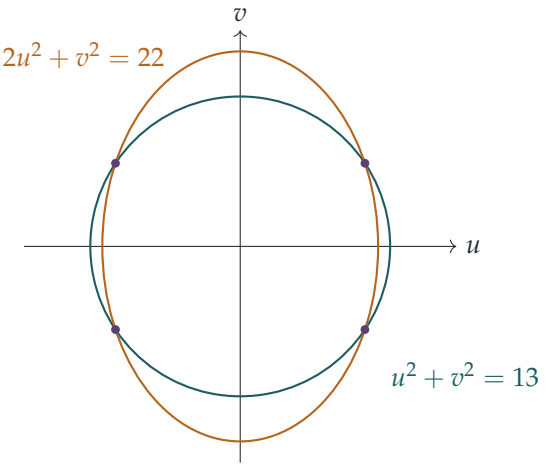
$$2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 22.$$

이다. (항등식을 구할 때처럼 $\alpha(x - y + 2)^2 + \beta(\gamma x + y)^2 + \delta$에서 계수를 비교하여 이것을 구할 수도 있다.)

이제 $u = x - y + 2$, $v = 2x - y$라 하자. 연립방정식은 다음과 같이 된다.

$$u^2 + v^2 = 13, \qquad 2u^2 + v^2 = 22.$$

두 식을 빼면 $u^2 = 9$이고, 따라서 $v^2 = 4$이다. 그러므로 $u = \pm 3$, $v = \pm 2$이고 부호는 서로 독립적으로 정할 수 있으므로, 순서쌍 (u, v)는 네 개이다.



x와 y로 되돌아가기 위해 빼 보면 $v - (u - 2) = (2x - y) - (x - y) = x$이므로

$$x = v - u + 2, \qquad y = 2x - v = v - 2u + 4.$$

이다. 이 변수 변환(change of variables)은 일차이고 역변환이 존재하므로, 각 (u, v)에 대하여 (x, y)가 정확히 하나씩 대응한다. 네 해는 다음과 같다.

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

따라서

$$(x, y) = (1, 0), \quad (-3, -4), \quad (7, 12), \quad (3, 8).$$

검산

$(1, 0)$을 대입하면 첫 번째 방정식은 $5 + 4 = 9$, 두 번째 방정식은 $6 + 8 = 14$가 된다. $(7, 12)$에 대해서는 $245 + 288 - 504 + 28 - 48 = 9$, $294 + 432 - 672 + 56 - 96 = 14$이다.

컴퓨터로 무작위로 고른 유리수 점 천 개에서 두 항등식이 성립함을 확인하였고, 네 순서쌍이 모두 두 방정식을 만족함도 확인하였다. $|x|, |y| \leq 50$인 모든 정수 순서쌍에 대한 전수 탐색(brute-force search)에서도 정확히 이 네 해만 나왔다. 두 이차곡선(conic)은 많아야 네 점에서 만나므로 빠뜨린 해는 있을 수 없다.

흔한 실수

- xy의 계수를 확인하지 않고 $c^2 = 4$에서 $c = 2$로 정해 버린다.
- 양의 제곱근만 취하여 해를 네 개가 아닌 한 개만 구한다.
- 처음 방정식들에서 곧바로 변수를 소거한다. 이렇게 하면 사차방정식(quartic)이 나오는데, 손으로 풀기에는 매우 힘들다.

STEP 너머

이차형식(quadratic form)을 제곱들의 일차결합으로 나타내는 것은 이차형식 이론의 출발점이다. 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하면 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$을 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$으로 바꾸는 일차 변수 변환을 언제나 찾을 수 있으며, 이차곡선은 바로 이런 방법으로 분류된다. 이 문제에서는 두 방정식이 마침 같은 제곱 두 개를 공유했기 때문에 그렇게 깔끔하게 분리되었다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 명쾌하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.