풀이

STEP III 2009, 문제 9

역학 • 포물체 궤적의 각

STEP III 2009, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

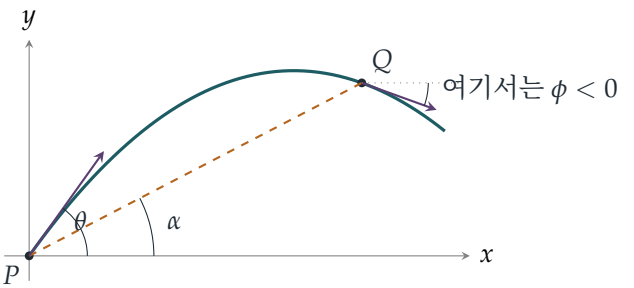
step.maths.org/questions/09-s3-q9

핵심 아이디어

포물체 운동(projectile motion)에서 수평 방향 속도는 변하지 않고, 수직 방향 속도는 일정한 비율로 변한다. 따라서 P와 Q 사이의 평균 수직 속도는 양 끝에서의 값의 평균일 뿐이고, 현(chord) PQ의 기울기(gradient)는 양 끝에서의 기울기의 평균이다. 이것으로 소문항 (i)이 한 줄에 해결된다. 소문항 (ii)에서는 ($\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$로 쓰고 나면) 궤적(trajectory)의 방정식이 $\tan\theta$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 나머지는 근의 합과 곱(sums and products of roots)이 해결해 준다.

풀이

입자는 공기 저항 없이 일정한 중력 g만 받으며 자유롭게 움직인다고 모형화한다. P를 원점으로 잡고, x축은 수평 방향의 양의 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 발사 속력을 u라 하고 $Q = (X, Y)$라 하자. $X > 0$이라고 가정한다. 즉 Q는 P의 양의 방향 쪽에 있으므로 수평 속도 $u\cos\theta$는 양수이고, 각 $\theta, \phi, \theta', \phi'$는 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속한다. ($Q$가 P의 바로 위나 바로 아래에 있다면 P와 Q에서의 각이 모두 $\pm\frac{\pi}{2}$가 되어 문제가 아무 내용도 담지 않게 된다.) 그러면 $\tan\alpha = Y/X$이다.



소문항 (i)

수평 속도는 $u\cos\theta$로 일정하다. 수직 속도는 P에서 $u\sin\theta$이고 Q에서는 v_Q라 하자. 수직 속도는 일정한 비율 g로 감소하므로 시간에 대한 일차함수(linear function)이다. 따라서 P에서 Q까지 날아가는 데 걸리는 시간을 T라 하면

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

이다. 구간에서 일차함수의 평균은 양 끝값의 평균이기 때문이다. 각 점에서 운동 방향은 속도의 방향이므로 $\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$이고 $\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$이다. 나누면

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

이 되고, 이는 곧 $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$이다. 이로써 증명되었다.

소문항 (ii)

이차방정식. $x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$에서 t를 소거하면 궤적

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta).$$

을 얻는다. $k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$라 두면 이는 양수이다. 경로가 (X, Y)를 지나므로 $T = \tan\theta$는

$$kT^2 - XT + (Y+k) = 0.$$

을 만족한다. 두 번째 궤적도 같은 u, X, Y를 가지므로 $\tan\theta'$도 같은 방정식을 만족한다. 두 궤적은 서로 다르므로 $\theta \neq \theta'$이고, tan은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로 $\tan\theta$와 $\tan\theta'$는 이 방정식의 **두** 근이다. 따라서

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y+k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

첫 번째 결과. 탄젠트의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

이다. 여기에는 $Y \neq 0$이 필요하다. $Y = 0$이면($\alpha = 0$이므로 $\cot\alpha$가 정의되지 않는다) 두 근의 곱이 1이 되고, 이는 $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$를 뜻한다. 평지에서 같은 사거리를 주는, 익숙한 서로 여각(complementary angles)인 두 각이다. 그런 의미에서 결과는 여전히 성립한다.

두 번째 결과. $t = \tan\alpha = Y/X$, $s = \tan\theta + \tan\theta' = X/k$라 하자. 그러면 $Y/k = ts$이므로 $\tan\theta\tan\theta' = 1 + ts$이다. 소문항 (i)을 각 궤적에 적용하면

$$\tan\phi = 2t - \tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t - \tan\theta'.$$

이다. 따라서

$$\tan\phi + \tan\phi' = 4t - s,$$
$$1 - \tan\phi\tan\phi' = 1 - (4t^2 - 2ts + \tan\theta\tan\theta') = 1 - 4t^2 + 2ts - 1 - ts = t(s - 4t).$$

이 두 값이 동시에 0일 수는 없다. $\tan\phi' = -\tan\phi$이면 $\tan\phi\tan\phi' = -\tan^2\phi \le 0 \neq 1$이기 때문이다. $Y \neq 0$이고(따라서 $t \neq 0$) $s \neq 4t$일 때

$$\tan(\phi + \phi') = \frac{4t - s}{t(s - 4t)} = -\frac{1}{t} = -\cot\alpha = \tan(\theta + \theta').$$

이다. 나머지 경우에는 $1 - \tan\phi\tan\phi'$와 $1 - \tan\theta\tan\theta'$가 모두 0이거나($t = 0$), $\tan(\phi + \phi')$와 $\tan(\theta + \theta')$가 모두 무한대이다. 따라서 어느 경우든 $\phi + \phi'$와 $\theta + \theta'$는 탄젠트 값이 같거나, 둘 다 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배이다. 어느 쪽이든

$$\theta + \theta' - (\phi + \phi') = n\pi \quad \text{적당한 정수} n.$$

생각해 보기 탄젠트 값이 같다는 것만으로는 각이 π의 배수 차이까지만 결정된다. 그 배수가 정확히 π 하나라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각의 크기를 이용한다. 각 궤적에서 기울기는 $\tan\theta - \dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$이고, 이는 x가 증가함에 따라 순감소한다. $X > 0$이므로 $\tan\phi < \tan\theta$이고, 따라서 $\phi < \theta$이다. 마찬가지로 $\phi' < \theta'$이다. 네 각 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $0 < \theta - \phi < \pi$이고 $0 < \theta' - \phi' < \pi$이다. 더하면

$$0 < n\pi = (\theta + \theta') - (\phi + \phi') < 2\pi,$$

이므로 $n = 1$이고, $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$이다. 이로써 증명되었다.

검산

- $X = 1$, $Y = \frac{1}{2}$, $u^2 = 4g$로 잡으면 $k = \frac{1}{8}$이다. 이차방정식은 $T^2 - 8T + 5 = 0$이 되고, 근은 $4 \pm \sqrt{11}$이다. 그러면 $\tan(\theta + \theta') = 8/(1 - 5) = -2 = -\cot\alpha$이다. 수치로 계산하면 $\theta + \theta' \approx 2.0344$이고 $\pi + \phi + \phi' \approx 2.0344$이다. 여기서 $\tan\phi = 1 - \tan\theta$, $\tan\phi' = 1 - \tan\theta'$이다.
- 평지($Y = 0$): $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$이고, 대칭성에 의해 $\phi = -\theta$, $\phi' = -\theta'$이다. 따라서 $\pi + \phi + \phi' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$로, 당연히 그래야 하는 대로이다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하여 소문항 (i)을 확인했고, 두 궤적이 존재하는 u, X, Y의 무작위 선택 20,000가지에 대해 소문항 (ii)의 두 결과를 모두 검증했다.

흔한 실수

- 탄젠트 값이 같다는 것만으로 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$라고 결론 내리는 것. 탄젠트 값이 같으면 각은 π의 배수 차이까지만 정해지므로, 어떤 배수인지 확정하려면 부등식 $\phi < \theta$와 $\phi' < \theta'$가 필요하다.
- $\tan\theta$와 $\tan\theta'$가 왜 같은 이차방정식의 **서로 다른 두** 근인지 설명하지 않는 것. 궤적이 서로 다르고 tan이 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일이므로 두 값은 서로 다르다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 가역성(reversibility)의 관점에서 멋지게 해석할 수 있다. 어느 경로든 거꾸로 따라가면 Q에서 P로, 각 $\phi + \pi$로 발사된 포물체가 된다. 따라서 네 각은 양 끝 사이의 대칭성으로 서로 묶여 있고, 관계식 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$가 바로 그 대칭성을 표현한다. (마찰이나 항력이 없을 때) 뉴턴(Newton)의 법칙이 갖는 시간 반전 대칭(time-reversal symmetry)은 대학 역학 전반을 관통하는 주제이다. 포물체 운동을 비롯한 여러 내용을 대학 1학년 수준에서 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.