풀이

STEP III 2009, 문제 8

순수수학 • 극한과 점화 공식

> **STEP III 2009, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.5 절 2학년생의 꿈에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/sophomores-dream.html

핵심 아이디어

모든 소문항은 로그(logarithm)가 "약하다"는 사실에 관한 것이다. 0 근처에서 $\ln x$는 아주 느리게 발산하므로, x의 어떤 양의 거듭제곱도 $\ln x$의 어떤 거듭제곱보다 강하다. 치환(substitution) $x = \mathrm{e}^{-t}$를 하면 이 사실은 지수함수가 거듭제곱보다 강하다는 주어진 사실로 바뀐다. 그리고 이 극한(limit)은 부분적분(integration by parts)을 할 때 경계항(boundary term)을 없애 준다. 마지막 소문항에서는 지수함수의 급수를 $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$에 적용하면 정확히 소문항 (ii)의 적분들이 나온다.

풀이

소문항 (i)

$\ln x$는 $x > 0$에서만 정의되므로, 이 극한은 $x \to 0^+$를 뜻한다. $x = \mathrm{e}^{-t}$로 놓으면 $\ln x = -t$이고, $x \to 0^+$인 것과 $t \to \infty$인 것은 같다. 그러면

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

인수 $(-1)^n$은 고정된 부호일 뿐이고, 주어진 결과에 의해 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-mt} t^n \to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x \to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

두 번째 결과를 위해 $m = n = 1$로 놓으면, $x \to 0$일 때 $x \ln x \to 0$을 얻는다. 지수함수는 연

속(continuous)이므로

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad (\text{단}, x \to 0,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

먼저 이 적분이 의미가 있음을 확인한다. 피적분함수(integrand) $x^m(\ln x)^n$은 $(0,1]$에서 연속이고, 소문항 (i)에 의해 $x \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $(0,1]$에서 유계이고, I_n은 보통의 (수렴하는) 적분이다.

$u = (\ln x)^{n+1}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$으로 놓고 I_{n+1}을 부분적분하면, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$, $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$이므로

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $\ln x$가 정의조차 되지 않는 $x = 0$에서 경계항은 무엇인가?

아래끝은 실제로는 $x \to 0^+$일 때의 극한을 뜻한다. 소문항 (i)에서 m과 n 대신 $m+1$과 $n+1$을 쓰면 ($m+1 \geq 1$이고 $n+1 \geq 0$이므로 둘 다 허용된다) $x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$이다. 위끝에서는 $\ln 1 = 0$이고 $n+1 \geq 1$이므로 그 항도 0이다. 따라서 대괄호 부분은 사라지고

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1}\,I_n,$$

이며, 이것이 증명하려던 것이다.

I_n의 값을 구하기 위해

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

에서 출발한다. 점화식(recurrence relation)의 각 단계는 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $-\dfrac{k}{m+1}$을 곱하므로

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

(한 줄짜리 귀납법(induction)으로 이를 확인할 수 있다. n에 대해 성립하면 점화식에 의해 $-\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$이다.)

소문항 (iii)

$0 < x \le 1$에 대하여 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$로 쓰고 지수급수(exponential series)를 이용하면

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

($x = 0$에서의 값은 적분에 영향을 주지 않는다. 소문항 (i)에 의해 함수 x^x는 그곳에서 1로 수렴하므로 유계이고, 이 적분은 보통의 적분이다.)

이제 항별로 적분한다. $n = 0$인 항은 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$이다. $n \ge 1$이면 n번째 항은 소문항 (ii)에서 $m = n$인 I_n이다 (이때 m은 양의 정수이므로 허용된다).

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

이 공식은 $n = 0$일 때에도 1을 준다. 따라서

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

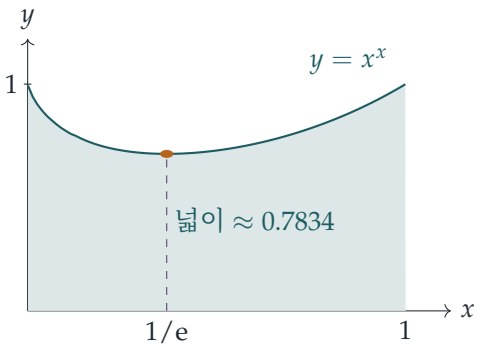
이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? 생각해 보기 무한합을 항별로 적분해도 되는가?

자동으로 되는 것은 아니지만, 여기서는 $x\ln x$가 작게 유지되므로 안전하다. 그 도함수는 $\ln x + 1$이므로 $(0,1]$에서 $x = 1/\mathrm{e}$일 때 최솟값을 가지며, $|x\ln x| \le 1/\mathrm{e} < 1$이다. $u = x\ln x$라 하고 급수를 u^N 항까지에서 멈추면, $(0,1]$의 모든 x에 대하여 나머지는

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \le \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \le \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \le \frac{2}{(N+1)!}$$

를 만족한다. 길이가 1인 구간에서 적분하면, 잘라낸 항별 적분(term-by-term integration)의 오차는 많아야 $2/(N+1)!$이고, 이는 0으로 수렴한다. 따라서 적분은 급수의 합과 같다.



검산

- 소문항 (ii)에서 $m = 1, n = 1$로 놓으면 $\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$이고, 이는 직접 부분적분한 결과 ($[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$)와 일치한다.
- 수치적으로, 중점 공식(midpoint rule)에 의해 $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x \approx 0.7834305$이고, 부분합(partial sums) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$은 항들이 매우 빠르게 작아지므로 몇 개의 항만으로 0.7834305에 자리 잡는다.
- 그래프는 최솟값 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.69$와 1 사이에 있으므로 넓이는 0.69와 1 사이여야 하며, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 0에서의 경계항을 아무 설명 없이 버리는 것. 이것이 바로 소문항 (i)의 핵심이며, $m + 1 \geq 1$이 필요하다.
- I_n의 부호를 틀리는 것. $(0, 1)$에서 $\ln x < 0$이므로 I_n은 $(-1)^n$과 같은 부호를 가진다.
- 소문항 (iii)에서 $n = 0$인 항을 잊는 것. 맨 앞의 1은 여기서 나온다.

STEP 너머

마지막 항등식은 "2학년생의 꿈"(sophomore's dream)이라고 불리며, 1697년에 요한 베르누이(Johann Bernoulli)가 발견했다. 우리가 정당화해야 했던 단계, 즉 적분과 무한합의 순서를 바꾸는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 주제이다. 이는 급수가 **균등하게** 수렴할 때, 즉 균등수렴(uniform convergence)할 때 안전하며, 우리의 나머지 항 評價가 보여준 것이 바로 이것이다 (이는 바이어슈트라스 M-판정법(Weierstrass M-test)의 한 예이다). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 균등수렴과 항별 적분이 언제 가능한지를 매우 읽기 쉽게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.