풀이

STEP III 2009, 문제 7

순수수학 • 반복 미분과 수학적 귀납법

STEP III 2009, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q7

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 단순한 항등식(identity) $(1+x^2)f_0(x) = 1$에서 출발한다. 이 식을 거듭 미분하면 연속한 도함수(derivative)들 사이의 관계식이 나오고, 어떤 n에 대해 성립하는 관계식을 한 번 더 미분하면 다음 관계식이 나온다. 이것이 바로 귀납 단계(induction step)의 모양이다. (ii)에서는 $1+x^2$의 알맞은 거듭제곱을 곱하여 모든 분모를 없애고, 두 번째 귀납법(induction)으로 최고차항을 추적하여 차수(degree)를 확정한다.

풀이

소문항 (i)

$f_n(x)$를 f_n으로 쓰고, 다음 명제를 $P(n)$이라 하자.

$$(1+x^2)f_{n+1} + 2(n+1)xf_n + n(n+1)f_{n-1} = 0.$$

기저 단계(*base case*). 모든 x에 대해 $(1+x^2)f_0 = 1$이므로, 이를 미분하면($f_0' = f_1$을 이용하여) 다음을 얻는다.

$$(1+x^2)f_1 + 2xf_0 = 0.$$

각 항에 곱의 미분법(product rule)을 써서 한 번 더 미분하면

$$(1+x^2)f_2 + 2xf_1 + 2xf_1 + 2f_0 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (1+x^2)f_2 + 4xf_1 + 2f_0 = 0,$$

이고, 이것이 $P(1)$이다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 1$에 대해 모든 x에서 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 이는 x에 관한 항등

식이므로 미분할 수 있다. $f_k' = f_{k+1}$을 이용하면

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2 + 2(n+1) = 2(n+2)$이고 $2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$임을 썼다. 이것이 $P(n+1)$이다. 따라서 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대해 $P(n)$이 성립한다.

(같은 내용을 다르게 보면, 라이프니츠(Leibniz) 법칙을 써서 $(1+x^2)f_0 = 1$을 정확히 $n+1$번 미분하면 된다. $1+x^2$의 삼계도함수가 0이므로 세 항만 남고, 그 세 항이 바로 $P(n)$의 세 항이다.)

소문항 (ii)

처음 세 개. $P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$이다. 다음으로

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{이므로} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

몫의 미분법(quotient rule)으로 f_1을 미분하면

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3},$$

이므로 $P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$이다. ((i)에서 $n = 1$로 두어도 같은 결과 $(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$을 얻는다.)

점화식. $P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$을 곱의 미분법으로 미분하면

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

양변에 $1+x^2$를 곱하면 각 항이 P로 바뀐다.

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

이항하여 정리하면, 모든 $n \geq 0$에 대해

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

이 성립하여 원하는 점화식(recurrence)을 얻는다. 여기서는 귀납법이 필요 없다. 각 n에 대해 그대로 성립하는 직접 계산이다.

생각해 보기 최고차항들이 소거되어 차수가 더 작아지는 것이 아니라, 차수가 정확히 n임을 어떻게 알 수 있을까?

귀납 과정에서 필요한 정보를 함께 실어 나르도록 조금 더 강한 명제를 증명한다. P_n은 **최고차항 계수**(*leading coefficient*)가 $a_n \neq 0$인 n**차 다항식**(*polynomial*)**이다**. $P_0 = 1$이므로 $n = 0$일 때 성립한다.

어떤 $n \geq 0$에 대해 성립한다고 가정하자. 즉 $a_n \neq 0$이고 $P_n = a_n x^n + (\text{낮은 차수 항})$이다. 점화식에 의해

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

P_n이 다항식이므로 P_n'도 다항식이고, 따라서 우변은 다항식이다. 이제 $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$이므로($n = 0$일 때는 이것이 0이며, $na_n = 0$과 일치한다) $(1+x^2)P_n'$은 차수가 $n+1$ 이하이고 x^{n+1}의 계수는 na_n이다. 또 $2(n+1)xP_n$은 최고차항 계수가 $2(n+1)a_n$인 $n+1$차 다항식이다. 따라서 P_{n+1}의 차수는 $n+1$ 이하이고, x^{n+1}의 계수는

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

$a_n \neq 0$이고 $n+2 > 0$이므로 이 값은 0이 아니다. 따라서 최고차항은 소거될 수 없고, P_{n+1}의 차수는 정확히 $n+1$이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대해 P_n은 n차 다항식이다.

덤으로, $a_0 = 1$과 $a_{n+1} = -(n+2)a_n$으로부터 $a_n = (-1)^n(n+1)!$을 얻으며, 이는 위의 $a_1 = -2$, $a_2 = 6$과 일치한다.

검산

- $x = 0$, $n = 1$에서 (i): P_n으로부터 $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -2$를 얻고, $f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$이다.
- $n = 1$일 때 점화식: $(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$.
- $x = 0.7$에서 수치로 확인하면, 중심차분(central difference)으로 $f_0''(0.7) \approx 0.284164$를 얻고, $(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$이다. 또한 (i)과 점화식을 $n = 12$까지, 무작위로 고른 유리수 점 200개에서 유리수 연산으로 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- 주어진 범위에 맞는 기저 단계를 증명하지 않는 것: (i)의 항등식은 $n = 1$부터 시작하므로 기저 단계는 $n = 1$이어야 하고, 이를 위해서는 f_2가 필요하다.
- $(1+x^2)P_n'$과 $2(n+1)xP_n$의 x^{n+1} 항이 소거되지 않는지 확인하지 않고 "차수가 매번 하나씩 올라간다"고 말하는 것. $n \neq 2(n+1)$이므로 소거되지 않지만, 이 점을 반드시 밝혀야 한다.

STEP 너머

복소수(complex number)를 써서 부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$이 되어 모든 도함수를 쉽게 구할 수 있고, 닫힌 형태(closed form) $P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \mathrm{Im}\,(x+\mathrm{i})^{n+1}$을 얻는다($n = 1, 2$에 대해 확인해 보라). 이어서 $x = \cot\theta$로 놓으면 P_n의 영점(zero)이 $k = 1, \ldots, n$에 대해 $\cot\frac{k\pi}{n+1}$임을 알 수 있다. 이 영점들은 모두 실수이고 서로 다르다. 이는 고전적인 직교다항식(orthogonal polynomial)의 영점과 닮았는데, 직교다항식 역시 간단한 함수를 거듭 미분하여 만들어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 복소수가 왜 이런 계산을 길들이는지 보여 주는 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.