풀이

STEP III 2009, 문제 6

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

STEP III 2009, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q6

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점 사이의 거리는 두 점 사이의 각에만 의존하며, 이 거리를 구하는 요령은 "평균" 각을 묶어 내는 것이다: $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$는 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$에 순허수를 곱한 것이다. 모든 현(chord)의 길이를 각의 차의 절반에 대한 사인으로 나타내고 나면, 큰 항등식은 삼각 항등식(trigonometric identity)이 되고, 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)을 쓰면 두어 줄 만에 해결된다. 이때 네 점은 원에 내접하는 사각형을 이루며, 이 항등식은 그 사각형에 관한 유명한 정리이다.

풀이

현의 길이

$e^{i(\alpha+\beta)/2}$를 묶어 낸다:

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

$|e^{i(\alpha+\beta)/2}| = 1$이고 $|2i| = 2$이므로

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|.$$

마지막으로 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$이면 $0 < \frac{1}{2}(\beta-\alpha) < \pi$이므로 사인 값이 양수이고, 따라서 절댓값(modulus) 기호를 없앨 수 있다: $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. 이로써 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 애초에 $\alpha < \beta$라는 조건은 왜 있는 것일까?

이 조건이 없으면 $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$가 $(-\pi, 0)$에 속할 수 있어서 사인 값이 음수가 되고, 공식은 음수인 길이를 내놓게 된다. 각의 순서를 정해 두는 것이 바로 절댓값 기호를 없앨 수 있게 해 주는 것이다. 또한 $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}|$이므로 절댓값 안의 순서는 상관없다는 점에도 주목하자.

항등식

$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$이므로 항등식에 나타나는 모든 쌍은 증가하는 순서로 되어 있고, 따라서 첫 번째 결과를 여섯 개의 절댓값 모두에 적용할 수 있다. 공통인수 $2 \cdot 2 = 4$로 양변을 나누면, 보여야 할 것은

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma) + \sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

이다. 자연스러운 변수는 이웃한 점들 사이의 세 간격이다.

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\gamma-\beta), \qquad z = \tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

로 두면 $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) = x+y$, $\frac{1}{2}(\delta-\beta) = y+z$, $\frac{1}{2}(\delta-\alpha) = x+y+z$이다. 보일 명제는

$$\sin x \sin z + \sin y \sin(x+y+z) = \sin(x+y)\sin(y+z).$$

이다. 각 곱에 $2\sin P \sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$를 적용하면

$$\begin{aligned} 2\sin x \sin z &= \cos(x-z) - \cos(x+z), \\ 2\sin y \sin(x+y+z) &= \cos(x+z) - \cos(x+2y+z), \\ 2\sin(x+y)\sin(y+z) &= \cos(x-z) - \cos(x+2y+z). \end{aligned}$$

첫 두 줄을 더하면 $\cos(x+z)$ 항이 소거되어 정확히 세 번째 줄이 된다. 따라서 삼각 항등식이 성립하며(사실 모든 x, y, z에 대하여 성립한다), 다시 4를 곱하고 현의 길이 공식을 쓰면

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma} - e^{i\delta}| + |e^{i\beta} - e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha} - e^{i\delta}| = |e^{i\alpha} - e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta} - e^{i\delta}|,$$

를 얻어 증명이 끝난다.

생각해 보기 삼각 항등식은 모든 x, y, z에 대하여 성립한다. 그렇다면 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$라는 순서는 어디에서 쓰였을까?

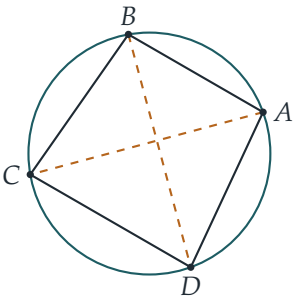
각 절댓값을 절댓값 기호 없이 $2\sin$(차의 절반)으로 바꾸는 곳에서 쓰였다. 점들의 순서가 맞지 않으면 그 사인 값 중 일부가 음수가 되어, 길이 사이의 항등식은 일반적으로 성립하지 않는다. 예를 들어 각이 $0.3, 2, 1, 4$이면($\gamma < \beta$인 경우) 좌변은 약 4.84, 우변은 약 1.15이다.

해석

A, B, C, D를 각각 점 $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$라 하자. 이 점들은 단위원 위에 있고, 각의 순서에 따라 시계 반대 방향으로 돌면 A, B, C, D의 순서로 만나게 된다. 따라서 $ABCD$는 변이 AB, BC, CD, DA이고 대각선(diagonal)이 AC, BD인 (볼록한) 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이며, 항등식은

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

임을 말해 준다.



모든 원은 단위원을 확대·축소하고 평행이동하여 얻을 수 있으며, 이 등식의 양변은 같은 비율(닮음비의 제곱)로 변하므로, 이 결과는 원에 내접하는 모든 사각형에 대하여 성립한다: **원에 내접하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 곱의 합은 두 대각선의 곱과 같다.** 이것이 톨레미의 정리(Ptolemy's theorem)이다.

검산

- 단위원에 내접하는 정사각형($\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$)은 변의 길이가 $\sqrt{2}$이고 대각선의 길이가 2이다: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$.
- 변의 길이가 a, b인 직사각형에서는 $a^2 + b^2 =$ (대각선)^{2}을 얻는다: 톨레미의 정리는 피타고라스(Pythagoras)의 정리를 포함한다.
- 수치적으로, 순서대로 정렬된 각 네 개의 무작위 조합 10^5개에 대하여 양변이 2×10^{-15} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 사인 값이 양수인지 확인하지 않고 $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$라고 쓰는 것.
- $\sin\frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ 같은 식들을 원래의 네 각으로 나타내어 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 전개하는 것: 이렇게 해도 되기는 하지만, 세 간격 x, y, z를 쓰는 것보

다 훨씬 복잡하다.

- 항등식이 성립하려면 꼭짓점이 원 위의 순서대로 놓여 있어야 한다는 것을 잊는 것: 우변에 오는 것은 아무 두 현이 아니라 대각선이다.

STEP 너머

일반적인 위치에 있는 네 점에 대해서는 같은 양들이 톨레미의 **부등식** $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$만을 만족하며, 등호는 네 점이 그 순서대로 한 원 위에 있을 때, 그리고 그때에만 성립한다. 복소수 항등식 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$와 삼각부등식(triangle inequality)을 이용하면 깔끔하게 증명할 수 있다. 그 배경에는 복비(cross-ratio)가 있는데, 이것은 원을 원으로 보내며 복소기하학의 중심에 있는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 불변량이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.