풀이

STEP III 2009, 문제 5

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 2009, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q5

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 것은 세 개의 **기본 대칭함수**(*elementary symmetric functions*)

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

에 관한 것이다. 이 값들을 알고 나면 x, y, z는 이미 알려진 삼차방정식(cubic) $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$의 근(roots)이 되기 때문이다. 새로운 정보는 모두 주어진 거듭제곱의 합(power sums) 두 개를 곱하고, 어떤 교차항이 나타나는지 살펴보는 데서 나온다. 그러면 점화식(recurrence)은 삼차방정식에서 자연스럽게 따라 나온다. x, y, z 각각이 이 방정식을 만족하므로, 그 거듭제곱들도 각각 만족하는 것이다.

풀이

$S_n = x^n + y^n + z^n$으로 놓자. 그러면 주어진 조건은 $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$이다.

$yz + zx + xy$의 값

S_1을 제곱하면

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

이므로 $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$이고, 따라서

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

$\sum x^2y$의 값, 그리고 xyz의 값

(한 변수의 제곱)×(그와 다른 변수) 꼴의 여섯 항을 모두 더한 것을 $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$로 놓자. S_2와 S_1을 곱하면 아홉 개의 항이 나오는데, 세 개의 세제곱과 T의 여섯 항이다.

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

따라서 $2 \times 1 = 3 + T$이고,

$$T = -1,$$

이다. 이것이 두 번째 결과이다.

생각해 보기 이미 아는 양들의 어떤 곱에 T와 xyz가 함께 들어 있을까?

$(x + y + z)(yz + zx + xy)$를 생각해 보자. 전개하면 아홉 개의 항이 나온다. 그중 여섯 개는 $x \cdot xy = x^2y$ 꼴이고, 이것들이 바로 T의 여섯 항이다. 나머지 세 개는 $x \cdot yz, y \cdot zx, z \cdot xy$이고, 각각 xyz와 같다. 그러므로

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

아는 값들을 대입하면 $1 \times (-\frac{1}{2}) = -1 + 3xyz$이므로 $3xyz = \frac{1}{2}$이고,

$$xyz = \frac{1}{6},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

점화식

이제 $e_1 = 1, e_2 = -\frac{1}{2}, e_3 = \frac{1}{6}$임을 안다.

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6},$$

이므로 x, y, z는 각각 이 삼차방정식의 근이다. 특히

$$x^3 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

이고, y와 z에 대해서도 마찬가지이다. 양변에 x^{n-2}를 곱하면

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{6}x^{n-2},$$

이고, x 대신 y나 z를 넣어도 같은 식이 성립한다. 세 식을 더하면

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{6}S_{n-2},$$

이므로

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{6}.$$

생각해 보기 "모든 n에 대하여"라는 조건 때문에 음의 거듭제곱에서 문제가 생기지는 않을까?

$n \geq 2$이면 x^{n-2}를 곱하는 데 아무 문제가 없다. 더 작은 n에 대해서는 x, y, z의 음의 거듭제곱이 필요한데, 이들 중 어느 것도 0이 아니므로(곱이 $\frac{1}{6} \neq 0$이다) 음의 거듭제곱이 존재한다. 따라서 이 관계식은 모든 정수 n에 대하여 성립한다. (x, y, z가 모두 실수가 아니어도 성립하며, 실제로 모두 실수인 것은 아니다. 이 삼차방정식은 약 1.431인 실근 하나와 서로 켤레인 두 복소근(complex conjugate roots)을 가진다.)

검산

- $n = 2$일 때 점화식은 $S_0 = 3$을 이용하여 주어진 값을 다시 만들어 내야 한다. 실제로 $S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$이다.
- 점화식에 따르면 $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$이고 $S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$이다. 삼차방정식을 수치적으로 풀어 (근은 1.43085와 $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$) 네제곱과 다섯제곱을 더하면 4.16667과 6.00000이 나와 일치한다. 같은 근들은 음의 n에 대해서도 점화식을 만족한다.

흔한 실수

- 삼차방정식의 부호를 틀리는 것. 삼차방정식은 $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3$이므로, 여기서 $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$이고 $c = e_3 = \frac{1}{6}$이다.
- $n = 2$에서 점화식을 확인할 때 S_0이 1이 아니라 $S_0 = 3$이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 뉴턴(Newton) 항등식(Newton's identities)으로, 변수가 몇 개이든 거듭제곱의 합과 기본 대칭함수를 연결해 준다. 그 바탕에는 **대칭다항식의 기본정리**(*fundamental theorem of symmetric polynomials*)가 있다. 즉, $x_1, \ldots, x_k$에 대한 모든 대칭다항식은 $e_1, \ldots, e_k$의 다항식으로 나타낼 수 있다. S_n에 대한 점화식은 특성방정식(characteristic equation)이 바로 그 삼차방정식인 선형 점화식(linear recurrence)이며, 이는 선형 차분방정식(linear difference equations)을 풀고 피보나치(Fibonacci) 수의 공식을 얻는 것과 같은 아이디어이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 관점에서 다항식과 그 근을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.