풀이

STEP III 2009, 문제 4

순수수학 • 라플라스 변환

> **STEP III 2009, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q4

핵심 아이디어

(i)–(iii)은 모두 정의 적분에 미적분을 한 줄 적용하면 된다. (i)은 두 지수함수를 합치기만 하면 되고, (ii)는 치환(substitution), (iii)은 부분적분(integration by parts)이다. (iv)는 부분적분을 두 번 해서 풀 수도 있지만, (iii)을 두 번 쓰고 sin과 cos의 변환(transform)이 서로를 결정하게 하는 편이 더 깔끔하다. 마지막 소문항에서는 목표인 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$를 $\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$의 세 단계로 만들어진 것으로 보고, 각 단계에 네 결과 중 하나를 쓴다.

풀이

함수 g의 라플라스 변환(Laplace transform)을 $\mathcal{L}[g](s)$로 쓰면 $F = \mathcal{L}[f]$이다. "적당한"이라는 말은 적분이 수렴(converge)한다는 뜻이고, 특히 $s > 0$일 때 $t \to \infty$이면 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$이라고 가정한다.

소문항 (i)

지수함수를 합치면

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-bt}f(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

이고, 이는 F의 정의에 $s+b$를 대입한 값이다. $s+b > 0$이므로 이렇게 해도 된다.

소문항 (ii)

$u = at$로 치환하면 $t = u/a$이고 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$이다. $a > 0$이므로 적분 구간의 끝 0과 ∞는 그대로이고, 따라서

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

이다. 여기서도 $s/a > 0$임을 이용했다.

소문항 (iii)

e^{-st}를 미분하고 $f'(t)$를 적분하는 방식으로 부분적분하면

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \Big[\mathrm{e}^{-st} f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (0 - f(0)) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

이다. 위끝에서의 값이 사라지는 것은 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-st} f(t) \to 0$이기 때문이다($f$가 적당하다는 조건의 일부이다).

소문항 (iv)

$S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$, $C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$라 하자. $|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$이고 cos에 대해서도 마찬가지이므로 $s > 0$일 때 두 적분은 모두 수렴한다. 또 $\mathrm{e}^{-st}\sin t$와 $\mathrm{e}^{-st}\cos t$는 모두 0으로 가므로 각각에 (iii)을 적용할 수 있다.

도함수가 cos이고 $\sin 0 = 0$인 $f = \sin$에 (iii)을 적용하면

$$C(s) = sS(s).$$

도함수가 $-\sin$이고 $\cos 0 = 1$인 $f = \cos$에 (iii)을 적용하면

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

(상수배는 적분 밖으로 그대로 나오므로 $-\sin t$의 변환은 $-S(s)$이다.) 첫째 식을 둘째 식에 대입하면

$$-S(s) = s^2 S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 덤으로

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

도 얻는다.

마지막 소문항

생각해 보기 새로운 적분 없이 $\sin t$를 어떻게 $\cos qt$로 바꿀 수 있을까?

미분하면 sin이 cos이 되고(이것이 (iii)이다), t의 척도를 바꾸면 $\cos t$가 $\cos qt$가 되며(이것이 (ii)이다), 지수함수를 곱하는 것은 (i)이다. 그러니 세 단계로 나아간다.

1단계: $\cos t$. $f(t) = \sin t$로 두고 (iii)을 쓰되 F에는 (iv)를 쓰면

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

(이것은 소문항 (iv)에서 덤으로 얻은 결과이다.)

2단계: $\cos qt$. $f(t) = \cos t$, $a = q > 0$으로 두고 (ii)를 쓰면

$$\mathcal{L}[\cos qt](s) = \frac{1}{q} \cdot \frac{s/q}{(s/q)^2+1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{sq}{s^2+q^2} = \frac{s}{s^2+q^2}.$$

3단계: $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$. $f(t) = \cos qt$, $b = p > 0$으로 두고 (i)을 쓰면 s를 $s+p$로 바꾸게 된다.

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt](s) = \frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}} \qquad (s > 0).$$

검산

- $p \to 0$, $q = 1$로 두면 $s/(s^2+1)$이 되어 1단계에서 구한 $\cos t$의 변환과 같다. $q \to 0$으로 두면 $1/(s+p)$가 되는데, 실제로 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t = 1/(s+p)$이다.
- $s \to \infty$이면 $sF(s) \to 1 = \cos 0$이며, 이는 당연하다. s가 크면 가중치 $s\mathrm{e}^{-st}$가 $t = 0$ 근처에 몰리므로 $sF(s)$는 함수의 0에서의 값으로 가기 때문이다.
- 수치적으로, $s = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$일 때 공식은 $1.5/6.25 = 0.24$를 주고, 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값도 이와 일치한다. 컴퓨터로 임의의 매개변수 값에서 (i)–(iv)와 최종 답을 확인한 결과 10^{-12} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$에서 나오는 인수 $1/a$를 빠뜨리거나, $F(s/a)$ 대신 $F(as)$로 쓰는 실수.
- 3단계에서 s의 일부만 옮기는 실수: **모든** s가 $s+p$가 되므로 분자는 s가 아니라 $s+p$이다.
- (iii)에서 $f(0)$의 부호를 틀리는 실수: 경계항은 $0 - f(0)$이다.

STEP 너머

이 규칙들은 미분방정식(differential equation)을 푸는 라플라스 변환법의 핵심 동력이다. (iii)은 미분을 s를 곱하는 것으로 바꾸므로, 상수계수 선형 상미분방정식(linear ODE)은 $F(s)$에 대한 대수방정식이 된다. 이 방정식을 푼 다음, 여기서 얻은 것과 같은 결과들로 만든 표에서 답을 "찾아보면" 된다. 이동 규칙 (i)은 바로 감쇠 진동(damped oscillation) $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$가 $s = -p \pm \mathrm{i}q$에서의 극(pole)으로 나타나는 이유이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 이 방법을 다루는 장이 통째로 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.