풀이

STEP III 2009, 문제 3

순수수학 • 극한과 곡선의 개형

STEP III 2009, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q3

핵심 아이디어

이 함수가 $t = 0$에서 정의되지 않는 것은 오직 $0/0$ 꼴 때문이므로, 거듭제곱급수(power series)를 쓰면 그곳에서 함숫값이 "무엇이어야 하는지" 알 수 있다. 소문항 (ii)는 모든 것을 공통분모(common denominator)로 통분하는 문제이다. 이때 나타나는 우함수(even function)는 사실 $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$가 모습을 바꾼 것이다. 소문항 (iii)에서 $f'(t)$의 부호는 전적으로 분자(numerator)에 의해 결정되는데, 그 분자가 바로 $\mathrm{e}^t(1-t)-1$이다. 문제에 이 부등식(inequality)이 등장하는 이유가 여기에 있다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$를 이용하면, $t \neq 0$일 때 인수 t를 약분할 수 있다.

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{단, } t \to 0,$$

분모(denominator)가 1로 수렴하기 때문이다. 따라서 $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$이다.

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

분자와 분모가 모두 0으로 수렴하므로 각각을 전개한다. 분자는

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= (t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots) - (t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

이고, 분모는 $(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots)^2 = t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2$이다. 분자와 분모를 t^2으로 나누면

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{단, } t \to 0.$$

소문항 (ii)

$g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$라 하자. 통분하면

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} + \frac{t}{2} = \frac{2t+t(\mathrm{e}^t-1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)}.$$

이제 t를 $-t$로 바꾸고 분자와 분모에 e^t를 곱한다.

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t}+1)}{2(\mathrm{e}^{-t}-1)} = \frac{-t\,(1+\mathrm{e}^t)}{2(1-\mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = g(t).$$

따라서 요구한 대로 $f(t)+\frac{1}{2}t$는 우함수이다. (분자와 분모를 $\mathrm{e}^{t/2}$로 나누면 $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$임을 알 수 있는데, 이는 두 기함수(odd function)의 곱이므로 이것도 같은 사실을 보는 또 다른 방법이다.)

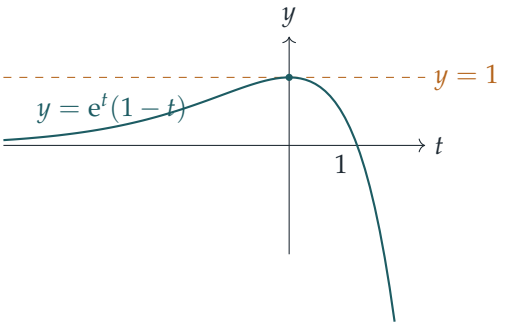
그래프를 그릴 때 유용한 결과가 하나 있다. $f(t)-f(-t) = -t$이므로, f의 그래프는 우함수의 그래프를 직선 $y = -\frac{1}{2}t$만큼 기울인 것이다.

소문항 (iii)

$h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$라 하자. 그러면

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

이고, 이는 $t<0$에서 양수, $t>0$에서 음수이다. 따라서 h는 $t=0$까지 증가하다가 그 뒤로 감소한다. 즉 유일한 전환점(turning point)은 극댓값(maximum) $h(0)=1$이다. 또한 $t\to-\infty$일 때 $h(t)\to 0$이고, $t>1$에서 $h(t)<0$이다.



이 곡선은 $t=0$에서 $y=1$에 접하고 그 밖의 모든 곳에서는 엄격하게 그 아래에 있으므로

$$\mathrm{e}^t(1-t) \le 1, \quad \text{등호는 다음일 때만 성립: } t=0.$$

? 생각해 보기 이 부등식이 $f'(t)$에 대해 무엇을 알려 주는가?

소문항 (i)에서 구한 $f'(t)$의 분자를 다시 보자.

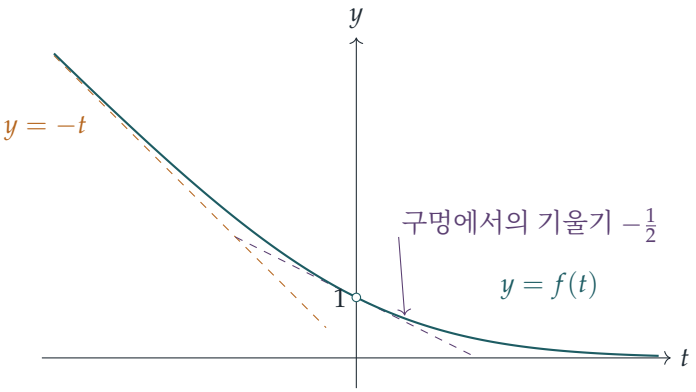
$$e^t - 1 - te^t = e^t(1-t) - 1.$$

위의 엄격한 부등식에 의해, $t \neq 0$이면 이 값은 엄격하게 음수이다. 분모 $(e^t-1)^2$은 $t \neq 0$에서 엄격하게 양수이다. 따라서 모든 $t \neq 0$에 대해 $f'(t) < 0$이다. 특히 $f'(t) \neq 0$이므로 f는 정상점(stationary point)을 갖지 않으며, 0의 양쪽에서 각각 감소한다.

f의 그래프 그리기

지금까지 얻은 사실을 정리한다.

- t와 $e^t - 1$의 부호가 같으므로 모든 $t \neq 0$에 대해 $f(t) > 0$이다.
- 0 근처에서 그래프는 기울기(gradient) $-\frac{1}{2}$로 $(0,1)$에 가까워진다(소문항 (i)). 단, $f(0)$이 정의되지 않으므로 그 점 자체는 빠져 있다.
- f는 전 구간에서 감소한다(소문항 (iii)).
- $t \to \infty$일 때, 지수함수가 t보다 빠르게 커지므로 $f(t) = t/(e^t-1) \to 0^+$이다.
- $t \to -\infty$일 때 $f(t) + t = \dfrac{te^t}{e^t-1} \to 0$이므로, $y = -t$는 사점근선(oblique asymptote)이다. 이는 소문항 (ii)로부터도 얻을 수 있다. $f(t) = f(-t) - t$이고 $f(-t) \to 0$이기 때문이다.



검산

- 소문항 (ii)에 따르면 $f(-1) - f(1) = 1$이어야 한다. 수치로 계산하면 $f(1) = 1/(e-1) \approx 0.58198$, $f(-1) = e/(e-1) \approx 1.58198$이고, 둘의 차는 정확히 1이다.

- 도함수 공식에 $t = \pm 10^{-4}$를 대입하면 -0.49998과 -0.50002가 나오며, 이는 극한값 $-\frac{1}{2}$와 일치한다.
- coth 꼴을 쓰면 작은 t에 대해 $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$이므로 $f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$이고, 이는 소문항 (i)의 두 극한과 모두 맞아떨어진다.

흔한 실수

- $f'(t)$에 로피탈(L'Hôpital) 정리를 한 번만 적용하고 또 다른 $0/0$ 꼴에서 멈추는 것. 분자와 분모를 모두 t^2 차수까지 전개하면 이를 피할 수 있다.
- $\mathrm{e}^t(1-t) \leq 1$만 증명하고 $f'(t) \neq 0$이라고 주장하는 것. $t \neq 0$에서 부등식이 **엄격해야** 하며, 이는 $t = 0$이 h의 유일한 정상점이라는 사실에서 나온다.
- 그래프를 $(0,1)$을 채워진 점으로 지나가게 그리는 것. f는 그 점에서 정의되지 않는다.

STEP 너머

전개식 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$은 베르누이 수(Bernoulli numbers) B_n을 정의한다. 소문항 (i)은 $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$임을 보여 주고, 소문항 (ii)는 $n \geq 3$인 모든 홀수에 대해 $B_n = 0$임을 보여 준다. 이 수들은 오일러-매클로린 합 공식(Euler–Maclaurin summation formula), 거듭제곱의 합 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, 그리고 $\sum 1/n^{2k}$에 대한 오일러(Euler)의 공식에 등장한다. $t = 0$에서와 같은 "구멍"을 메우는 것은 제거 가능한 특이점(removable singularity)이라는 개념이다. 극한(limit)과 연속성(continuity)을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.