풀이

STEP III 2009, 문제 2

순수수학 • 멱급수 해

STEP III 2009, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q2

핵심 아이디어

y가 거듭제곱급수(power series)이면 y', y'', x^3y도 거듭제곱급수이고, 미분방정식(differential equation)은 이들을 합친 하나의 거듭제곱급수가 항등적으로 0이라는 것을 말해 준다. 모든 x에 대하여 0이 되는 거듭제곱급수는 모든 계수가 0이므로, 미분방정식은 a_n 사이의 간단한 관계식들의 목록이 된다. 실제로 해야 할 일은 꼼꼼한 정리 작업이다. 계수를 비교하기 전에 첨자를 옮겨(shift indices) 모든 급수를 같은 x의 거듭제곱으로 나타내야 한다.

풀이

소문항 (i)

항별로 미분하면 (모든 급수가 수렴한다고 주어졌으므로 이것이 허용된다고 받아들인다),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ 항 a_0은 상수이고 그 도함수는 0이므로, 합은 $n = 1$부터 시작한다:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

이것이 요구된 결과이다. 같은 일을 한 번 더 하면, y'의 $n = 1$ 항 a_1은 상수이므로

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

a_3까지 풀어 쓰면 다음과 같다:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots.$$

소문항 (ii)

$xy'' - y' + 4x^3y$의 모든 항을 x^{n-1}에 관한 급수로 쓴다. 먼저,

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

이 합의 $n = 1$ 항은 $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$이 될 것이므로, 이 합도 $n = 1$부터 시작해도 된다. 그러면

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - n]a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

마지막 항은 $4x^3y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$이고, $m = n - 4$로 놓으면 거듭제곱이 x^{n-1}이 된다:

$$4x^3y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

? 생각해 보기 애초에 왜 계수를 비교할 수 있을까?

방정식은 급수가 수렴하는 구간의 모든 x에 대하여 $xy'' - y' + 4x^3y = 0$이라는 뜻이므로, 합친 거듭제곱급수는 그 구간에서 영함수이다. 수렴하는 거듭제곱급수가 어떤 구간에서 0이 되는 것은 모든 계수가 0일 때뿐이다 ($x = 0$을 대입하여 상수항을 얻고, x로 나누고, 이를 반복한다). 따라서 x의 각 거듭제곱의 계수는 0이어야 한다.

계수는 다음과 같다:

- x^0 ($n = 1$): $1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$이므로, 요구된 대로 $a_1 = 0$이다.
- x^1 ($n = 2$): $2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$은 자동으로 성립하므로, a_2는 자유롭게 정할 수 있다.
- x^2 ($n = 3$): $3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$이므로 $a_3 = 0$이다.
- $n \geq 4$일 때 x^{n-1}: $n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$.

$n \geq 4$이면 $n(n-2) \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 그러면

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (어떤 방정식도 그것 하나만을 단독으로 포함하지 않으므로 a_0 역시 자유롭게 정할 수 있다.)

$a_0 = 1, a_2 = 0$인 경우. 점화식(recurrence)은 a_n을 a_{n-4}에만 연결하므로, 계수들은 n을 4로 나눈 나머지에 따라 네 개의 사슬로 나뉜다. $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$에서 시작하는 사슬은 전부 0이므로, a_{4k}만 0이 아닐 수 있다. $k \geq 1$에 대하여 $n = 4k$로 놓으면,

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

$a_0 = 1$에서 시작하여 각 단계마다 -1을 곱하고 계승(factorial)의 다음 두 인수로 나누므로,

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

(검산: $a_4 = -\frac{1}{2}$, $a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$.) 따라서

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

이고, 이는 매클로린 급수(Maclaurin series) $\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$에 $u = x^2$를 대입한 것이다. 이것이 요구된 결과이다.

$a_0 = 0, a_2 = 1$인 경우. 이제 a_0, a_1, a_3에서 시작하는 사슬은 모두 0이고, a_{4k+2}만 살아남는다. $k \geq 1$에 대하여 $n = 4k + 2$로 놓으면,

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

이고, $a_2 = 1$로부터 $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$를 얻는다. 그러므로

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

검산

직접 대입해 본다. $y = \sin(x^2)$에 대하여 $y' = 2x\cos(x^2)$이고 $y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$이므로

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 수치적으로, $x = 1.2$에서 코사인 급수의 처음 40개 항의 합은 $0.1304237\ldots$이며, 이는 $\cos(1.44)$와 일치한다. 또한 두 답 모두 $x = 0$에서 타당하다: $\cos 0 = 1 = a_0$이고, 0 근처에서 $\sin(x^2) \approx x^2$이므로 $a_2 = 1$이다.

흔한 실수

- 첨자를 옮기기 전에 계수를 비교하여, 한 급수의 a_n을 다른 급수의 a_n과 짝지어 버리는 실수. 이 둘은 서로 다른 x의 거듭제곱에 곱해져 있는데도 말이다.

- $a_3 = 0$임을 잊는 실수. 이것이 있어야 사슬 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$이 모두 없어진다.
- $n(n-2)$가 $n \geq 4$에서 0이 아님을 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수. $n = 2$에서는 이것이 0이며, 바로 그 때문에 a_2를 자유롭게 정할 수 있다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 프로베니우스 방법(method of Frobenius)이다. 점 $x = 0$은 이 방정식의 **정칙 특이점**(*regular singular point*)인데, 그곳에서 y''의 계수가 0이 되기 때문이다. 일반 이론은 때로는 실패하는 보통의 거듭제곱급수 하나가 왜 여기서는 성공하는지를 설명해 준다 (결정 방정식의 근(indicial roots)인 0과 2는 정수만큼 차이가 난다). 같은 방법으로 베셀(Bessel) 함수와 르장드르(Legendre) 함수를 얻는다. 항별 미분을 정당화하려면 균등수렴(uniform convergence)이 필요한데, 이는 대학 1학년 해석학에서 다룬다. 두 아이디어 모두에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*와 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.