풀이

STEP III 2009, 문제 11

역학 • 질량이 변하는 운동

> **STEP III 2009, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q11

핵심 아이디어

질량이 변할 때는 $F = ma$가 올바른 법칙이 아니다. 이때는 힘 = 운동량(momentum)의 시간 변화율을 사용해야 한다. 먼지는 정지해 있으므로 그 자체로는 운동량을 가져오지 않으며, 혜성의 운동량 $M(1+bx)v$는 오직 외력 때문에만 변한다. 이로부터 곧바로 제1적분(first integral)을 얻는다. 그런 다음 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓰면 이 식은 변수분리형 방정식(separable equation)이 되고, 그 해는 x에 대한 이차식이다.

풀이

혜성을 입자로 모형화한다. 혜성이 모으는 먼지는 정지해 있었으므로 혜성에 운동량을 가져오지 않고, 계(혜성과 모은 먼지)에 작용하는 힘은 운동 방향으로 작용하는 중력 Mf뿐이다.

소문항 (i)

$f = 0$이면 외력이 없으므로 운동량이 보존된다. 진입할 때의 운동량은 MV이고, 시각 t에서의 운동량은 $M(1+bx)v$이다. 따라서

$$(1+bx)\,v = V.$$

이제 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$를 대입하고 변수를 분리하면

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

이다. 여기서 $t = 0$일 때 $x = 0$임을 이용하였다. 그러므로 $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$이고, $x \geq 0$이므로 양의 제곱근을 택한 근이 필요하다.

$$x = \frac{\sqrt{1 + 2bVt} - 1}{b}.$$

소문항 (ii)

이제 외력은 Mf이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(1 + bx)v] = Mf.$$

M과 f는 상수이므로 0부터 t까지 적분하면 $M(1 + bx)v - MV = Mft$이다($t = 0$에서 $x = 0, v = V$). 따라서

$$v = \frac{ft + V}{1 + bx},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

? **생각해 보기** 왜 그냥 $M(1 + bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$로 쓰면 안 되는가?

그 식은 새로 붙는 먼지 알갱이 하나하나를 정지 상태에서 속력 v까지 끌어올리는 데 필요한 운동량을 무시한다. 곱의 미분법을 쓰면 차이가 드러난다. 운동량의 변화율은 $M(1 + bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$이고, 둘째 항이 바로 그 "따라잡는" 비용이다.

소문항 (i)에서처럼 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓰고 변수를 분리하면

$$\int_0^x (1 + bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs + V)\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

그러므로 $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$이고, 다시 음이 아닌 근을 택하면

$$x = \frac{\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} - 1}{b}.$$

이다. ($f = 0$으로 두면 소문항 (i)의 결과가 다시 나온다.)

일정한 속력. 혜성이 일정한 속력 V로 움직이는 것은 모든 t에 대해 $x = Vt$일 때, 즉 $\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} = 1 + bVt$일 때와 정확히 같다. 양변을 제곱하면

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{모든} t,$$

가 성립해야 하고, 이는 $f = bV^2$일 때 그리고 그때에만 성립한다. 이때 $v = \dfrac{bV^2t + V}{1 + bVt} = V$이므로, 이렇게 택하면 혜성은 실제로 일정한 속력으로 움직인다. 중력이 혜성이 쓸어 모으는 먼지를 가속하는 데 필요한 운동량을 정확히 공급하는 것이다.

극한 속력. 일반적인 경우, x에 대한 공식에서 얻은 $1+bx=\sqrt{1+bft^2+2bVt}$를 이용하면

$$v=\frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}}=\frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}}\longrightarrow\frac{f}{\sqrt{bf}}=\sqrt{\frac{f}{b}}\quad\text{극한}t\to\infty,$$

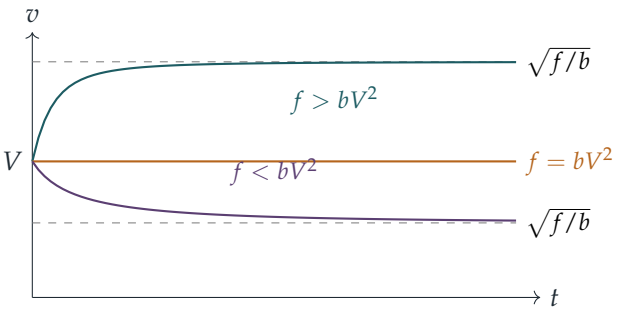
이다. 여기서 분자와 분모를 $t>0$으로 나누었고, $bf>0$임을 이용하였다(힘이 운동 방향으로 작용하므로 $f>0$이어야 한다). 따라서 속력은 상수 $\sqrt{f/b}$로 수렴(converge)한다.

? **생각해 보기** 이 결과는 일정한 속력의 경우와 모순이 없는가?

그렇다. $f=bV^2$이면 $\sqrt{f/b}=V$이고, 이는 혜성이 처음부터 줄곧 가졌던 속력이다. 실제로 v^2을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

이므로, 속력은 $f>bV^2$이면 $\sqrt{f/b}$를 향해 꾸준히 증가하고, $f<bV^2$이면 그 값을 향해 꾸준히 감소하며, $f=bV^2$이면 V로 유지된다.



검산

- 단위: b의 단위는 1/길이이고 f는 가속도이므로, f/b의 단위는 속력의 제곱이고 $\sqrt{f/b}$는 속력이다. 또한 bft^2과 bVt는 제곱근 안에 있어야 하므로 당연히 무차원(dimensionless)이다.
- $b=1, V=1, f=3$으로 두고 방정식 $\dot{x}=p/(1+bx)$, $\dot{p}=f$를 수치적으로 단계별 계산하면 x와 v에 대한 공식과 소수점 아래 여덟 자리까지 일치하며, $t=10^6$에서 속력은 $1.7320508\ldots\approx\sqrt{3}$이다.
- $b\to0$(먼지가 없는 경우)일 때 $x=\left(\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1\right)/b\to\frac{1}{2}ft^2+Vt$이고, 이는 익숙한 등가속도 운동의 결과이다.

흔한 실수

- 질량이 변하는 물체에 (질량) $\times \dot{v} =$ 힘을 사용하는 것.
- 이차방정식의 음의 근을 택하여 $x < 0$을 얻는 것.
- 운동량 방정식을 적분할 때 적분상수 MV를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

가변 질량 문제는 대학 1학년의 고전적인 주제이다. 같은 방식으로 운동량을 따져 보면 로켓 방정식(rocket equation)을 얻고, 구름 속을 떨어지며 커지는 빗방울은 이와 매우 비슷한 방정식으로 이어진다. 극한 속력 $\sqrt{f/b}$는 종단 속도(terminal velocity)로, 힘이 새로운 질량에 운동량을 쓰는 비율과 정확히 균형을 이루는 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.