풀이

STEP III 2009, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP III 2009, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q10

핵심 아이디어

평형(equilibrium) 상태의 압축량(compression) d는 용수철의 강성(stiffness)을 직접 언급하지 않고도 알려 주기 위해 주어진 것이다. 평형 상태에서는 용수철의 힘이 무게와 균형을 이루므로 $k/m = g/d$이다. 그다음에는 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해 평형 위치를 중심으로 한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 나오고, 낙하 높이 h는 오직 초기 속력을 통해서만 들어온다. 입자는 용수철이 더 이상 입자를 밀 수 없게 될 때 용수철에서 떨어지는데, 이는 압축량이 다시 0이 될 때 일어난다.

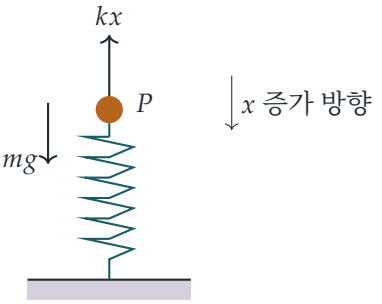
풀이

미분방정식

P를 질량 m인 입자로, 용수철을 강성 k로 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시한다. P가 용수철 위에 정지해 있을 때 P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg와 위 방향의 용수철 힘 kd이므로

$$kd = mg, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

이제 떨어뜨린 경우를 생각하자. x를 아래 방향으로 측정하고(이것이 압축량이다), 충돌하는 순간을 $t = 0$으로 잡는다. P가 용수철에 닿아 있는 동안 P에 작용하는 힘은 그림과 같다.



용수철이 가벼우므로 용수철이 P에 작용하는 힘은 정확히 위 방향으로 kx이다(가벼운 용수철은 양 끝에서 힘을 그대로 전달한다). 아래 방향을 양으로 잡고 뉴턴의 제2법칙을 적용하면 $m\ddot{x} = mg - kx$이므로

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

방정식 풀기

이것은 $x = d$를 중심으로 하는 단순 조화 운동이며

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

특수해(particular solution)는 상수 $x = d$이고 여함수(complementary function)는 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$이므로, 일반해(general solution)는

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

초기 조건(initial conditions)은 낙하 과정에서 얻는다. $t = 0$일 때 용수철에 막 닿았으므로 $x(0) = 0$이다. 또 P는 높이 h만큼 자유 낙하(free fall)했으므로 속력은 $\sqrt{2gh}$이고 방향은 아래, 즉 x가 증가하는 방향이다. 따라서

$$\begin{aligned} x(0) = d + B = 0 \qquad &\Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) = C\omega = \sqrt{2gh} \qquad &\Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

그러므로

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

분리되는 시각

? 생각해 보기 P는 정확히 언제 접촉을 잃는가?

용수철은 P에 붙어 있지 않으므로 밀 수는 있어도 당길 수는 없다. P에 작용하는 접촉력은 용수철 힘 kx이며, 이 힘은 $x > 0$인 동안 양수로 유지되다가 P가 위로 움직이면서 x가 다시

0이 될 때 0으로 떨어진다. 만약 운동이 그 지점을 넘어 계속된다면 방정식은 용수철이 아래로 당기는 힘을 요구하게 되는데, 용수철은 그런 힘을 줄 수 없다. 따라서 T는 $x = 0$이 되는 첫 번째 양의 시각이다.

이를 구하기 위해 진동하는 부분을 하나의 코사인으로 나타낸다. $R = \sqrt{d^2 + 2hd}$로 두고 예각 φ를

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

로 정의하면 $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$이고 $\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$이다. 그러면 $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$이고

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

따라서 $x = 0$인 것은 정확히 $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$일 때이다. t가 0부터 증가하면 각 $\omega t + \varphi$는 φ에서 출발하고, 구간 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$에서는 $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$이므로 그 구간에서 $x > 0$이다. 처음으로 다시 $\cos\varphi$가 되는 것은

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{즉,} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

일 때이다. $\omega = \sqrt{g/d}$로 나누면

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $h = 0$이면 입자는 자연 길이 상태의 용수철 위에 속력 0으로 놓이고, $\varphi = 0$이며 $T = 2\pi\sqrt{d/g}$이다. 즉 한 주기(period) 전체이고, 그 뒤 P는 속력 0으로 맨 위에 돌아온다. 정확히 맞는 결과이다.
- $h \to \infty$이면 $\varphi \to \frac{\pi}{2}$이고 $\omega T \to \pi$이다. 매우 빠른 입자는 용수철 위에서 반 주기만 머무는데, 진폭(amplitude)에 비해 평형 위치의 이동 d가 무시할 만큼 작아지기 때문이다.
- 에너지 보존(energy conservation)에 따르면 P는 속력 $\sqrt{2gh}$로 떠나야 한다. 실제로 $\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$이다.
- 수치적으로, $d = 0.1\,\mathrm{m}$, $h = 0.2\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 운동을 단계별로 계산하면 접촉 시간이 $0.411\,\mathrm{s}$로 나와 공식과 일치한다. d와 h에 임의의 값을 넣어도 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 평형 위치로부터 측정해 놓고 문제의 x가 압축량이라는 사실을 잊어서 $A = 0$을 얻는 것.

- 초기 속력을 $\sqrt{2gh}$로 잡되 부호를 틀리는 것. 아래 방향이 x가 증가하는 방향이다.
- 분리가 평형 위치 $x = d$에서, 또는 반 주기 후에 일어난다고 가정하는 것. 용수철은 자연 길이로 돌아올 때까지 계속 민다.

STEP 너머

이것은 **일방적 구속**(*unilateral constraint*)의 가장 간단한 예이다. 용수철은 밀 수는 있지만 당길 수는 없다. 운동은 단계마다 서로 다른 미분방정식을 따르고, 이 단계들은 위치와 속도를 맞추어 이어 붙인다. 여기서 자유 낙하 단계를 용수철 단계에 이어 붙인 것과 같은 방식이다. 같은 아이디어가 충돌(impact)과 튀는 계의 이론 전반에 걸쳐 나타난다. 진동자와 위의 검산에서 쓴 것과 같은 에너지 방법에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.