풀이

STEP III 2009, 문제 1

순수수학 • 원의 좌표기하

STEP III 2009, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

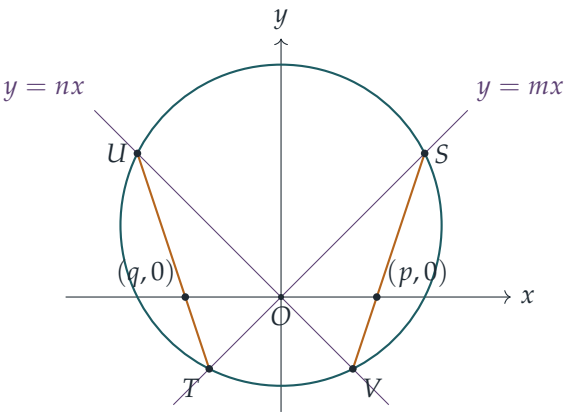
step.maths.org/questions/09-s3-q1

핵심 아이디어

네 점은 모두 원점(origin)을 지나는 직선 위에 있으므로, 각 점은 하나의 수, 즉 x좌표만으로 나타낼 수 있다. 원과 직선 $y = mx$의 교점을 구하면 두 근이 s와 t인 이차방정식(quadratic equation)을 얻는데, 근 자체는 전혀 필요하지 않고 두 근의 합과 곱만 있으면 된다. 마지막 항등식은 $p + q$의 분자를 $st, s + t, uv, u + v$만 나타나도록 묶어 주면 얻어진다.

풀이

풀이 전체에서 S와 T는 직선 $y = mx$ 위에, U와 V는 직선 $y = nx$ 위에 있고, 두 직선은 모두 원점 O를 지난다. $m \neq n$이라고 가정하고(그렇지 않으면 네 점이 모두 한 직선 위에 있다), SV와 UT가 수평이 아니어서 $y = 0$과 실제로 만난다고 가정한다. 즉 $ms \neq nv$이고 $mt \neq nu$이다.



절편 p와 q

$S(s, ms)$와 $V(v, nv)$를 지나는 직선의 기울기(gradient)는 $\dfrac{nv - ms}{v - s}$이므로, 이 직선 위의 점은 다음을 만족한다.

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}\,(x - s).$$

$y = 0, x = p$를 대입하면 $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$이므로

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. ($v = s$이면 직선 SV는 수직선이므로 $p = s$이다. 이때에도 공식은 $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$를 준다.)

직선 UT는 $y = mx$ 위의 점 $T(t, mt)$와 $y = nx$ 위의 점 $U(u, nu)$를 잇는데, 이는 SV가 S와 V를 잇는 것과 정확히 같은 구조이다. s를 t로, v를 u로 바꾸면

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s와 t에 대한 이차방정식

점 (x, mx)가 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 위에 있을 필요충분조건은 $x^2 + (mx - c)^2 = r^2$, 즉

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

이다. s와 t는 모두 이 식을 만족한다. S와 T를 직선과 원의 서로 다른 두 교점으로 잡으면 s와 t는 이 방정식의 두 근이므로, 근과 계수의 관계(relations between roots and coefficients)에 의해

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

$p + q = 0$ 보이기

직선 $y = nx$에 대해 같은 논증을 적용하면 u와 v는 $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$의 두 근이므로

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

이제 두 절편(intercept)을 통분하여 더한다.

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

생각해 보기 s, t, u, v 네 개가 모두 들어 있는 분자를 어떻게 다룰 수 있을까?

분자를 전개하고, 계수 m 또는 n에 따라 항을 짝지어 묶는다.

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= m\,stv - n\,suv + m\,stu - n\,tuv \\ &= m\,st(u+v) - n\,uv(s+t). \end{aligned}$$

이제 모든 항이 이미 알고 있는 대칭함수(symmetric function)이다. 대입하면

$$\begin{aligned} m\,st(u+v) - n\,uv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2} - n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} - \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} = 0. \end{aligned}$$

가정에 의해 분모 $(ms-nv)(mt-nu)$는 0이 아니므로 $p+q=0$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

그림에서처럼 $c=1$, $r^2=5$, $m=1$, $n=-1$로 잡자. 이차방정식은 $x^2-x-2=0$과 $x^2+x-2=0$이므로 $s=2$, $t=-1$이고 $u=-2$, $v=1$이다. 그러면 $st=-2=\frac{1-5}{2}$, $s+t=1=\frac{2}{2}$로 예측과 일치한다. $S(2,2)$에서 $V(1,-1)$로 가는 직선은 기울기가 3이고 $p=\frac{4}{3}$에서 $y=0$과 만나며, 이는 $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$과 일치한다. $U(-2,2)$에서 $T(-1,-1)$로 가는 직선은 $q=-\frac{4}{3}$에서 만난다. 무작위로 만든 원과 직선 16 000쌍으로 컴퓨터 검사를 해 보았더니 매번 $|p+q|$가 10^{-12}보다 작았다.

흔한 실수

- 점을 잘못 짝짓는 실수: q는 U와 T에서 나오므로 바꿔치기는 $s\to t$, $v\to u$이다. 대신 $s\leftrightarrow v$로 바꾸면 다시 p가 나온다.
- 이차방정식을 풀어 s,t,u,v를 직접 구하려는 시도. 제곱근 때문에 계산이 감당할 수 없게 된다. 식이 깔끔하게 정리되는 것은 $m\,st(u+v)-n\,uv(s+t)$로 묶어 주기 때문이다.

STEP 너머

원의 중심 $(0,c)$가 y축 위에 있으므로, 직선 $y=0$은 원과 만나 중점이 O인 현(chord)을 만든다. 따라서 이 문제는 **나비 정리**(butterfly theorem)를 증명한 셈이다. 즉 두 현 ST와 UV가 어떤 현의 중점 O를 지나면, SV와 UT는 그 현과 O로부터 같은 거리에 있는 점에서 만난다. 우리 증명은 $c^2<r^2$을 한 번도 쓰지 않았으므로 O가 원 밖에 있을 때에도 성립한다. 이는 이 결과가 본래 사영기하학(projective geometry)에 속한다는 암시이며, 사영기하학에서 이 결과는 데자르그(Desargues)의 대합 정리(involution theorem)의 한 경우이

다. 더 읽어 보고 싶다면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)가 훌륭한 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.