풀이

STEP II 2009, 문제 9

역학 • 질량중심

> **STEP II 2009, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q9

핵심 아이디어

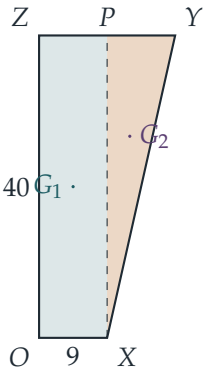
필요한 거리는 모두 하나의 고정된 평면에 수직으로 잰다. (i)에서는 모서리 OZ, (ii)에서는 OZ를 포함하는 탱크의 뒷면이다. 따라서 좌표는 하나만 있으면 된다. 각 도형을 무게중심(centre of mass)을 알고 있는 조각(직사각형과 삼각형)으로 나누고, 그 직선이나 평면에 대한 모멘트(moment)를 구한 다음 전체 질량으로 나눈다. 탱크도 한 단계 위에서 같은 계산을 한다. 탱크의 조각은 사다리꼴(trapezium) 금속판 두 장과 직사각형 금속판 세 장이고, 그다음에 액체 덩어리가 더해진다.

풀이

소문항 (i)

O를 원점으로 하고, x축을 OX 방향으로, y축을 OZ 방향으로 잡는다. 그러면 $X = (9,0)$, $Z = (0,40)$이고, YZ는 OX와 평행하며 길이가 18이므로 $Y = (18,40)$이다. 검산하면 $XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$로, 마땅히 그래야 하는 값이 나온다. OZ로부터의 거리는 바로 x좌표이다.

X에서 OZ에 평행한 직선을 그어 ZY와 만나는 점을 $P = (9,40)$이라 하자. 이 직선은 얇은 판(lamina)을 직사각형 $OXPZ$와 직각삼각형 XYP로 나눈다.



판의 질량을 cm^2당 1이라 하면, 질량은 넓이와 같다.

- 직사각형 $OXPZ$: 넓이 $9 \times 40 = 360$, 무게중심 G_1은 $x = 4.5$에 있다.
- 삼각형 XYP: 넓이 $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$. 균일한 삼각형의 무게중심은 세 꼭짓점의 평균이므로, G_2는 $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$이다.

판 전체의 넓이는 540이다. OZ에 대한 모멘트를 구하면

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

이므로 $\bar{x} = 7$이다. 따라서 무게중심은 요구한 대로 OZ로부터 7 cm 떨어져 있다.

소문항 (ii)

이제 금속판의 질량을 cm^2당 1이라 하자. 뒷면 $OTWZ$는 평면 $x = 0$ 위에 있고, 폭 d가 양 끝면에 수직인 방향으로 놓이므로 탱크의 모든 점은 (i)에서의 x좌표를 그대로 유지한다. 따라서 뒷면에 대한 모멘트를 구한다. 각 직사각형 면은 균일하므로 무게중심은 그 중심에 있고, 그 x좌표는 사다리꼴의 대응하는 변의 중점의 x좌표와 같다.

조각	넓이 (cm^2)	중심의 x (cm)	모멘트
양 끝면	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
밑면 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
뒷면 $OTWZ$	$40d$	0	0
앞면 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
합계	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

생각해 보기 기울어진 앞면의 중심은 어디인가?

앞면은 한 쌍의 변이 XU와 YV인 직사각형이고, 이 두 변은 $x = 9$와 $x = 18$에 있다. 그 중심은 두 변의 한가운데인 $x = 13.5$에 있다. 넓이는 수평 폭 9가 아니라 비스듬한 길이 $XY = 41$을 써서 구한다.

따라서 빈 탱크에 대하여

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

모든 계수가 18로 나누어떨어진다: $7560 = 18 \times 420$, $594 = 18 \times 33$, $1080 = 18 \times 60$, $90 = 18 \times 5$. 따라서

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

이고, 이것이 요구한 뒷면으로부터의 거리이다.

가득 찬 탱크

액체는 단면이 (i)의 사다리꼴이고 길이가 d인 각기둥(prism)을 채운다. 그 부피는 $540d$이므로, 우리의 단위로 질량은 $540dk$이다(단위 부피당 질량은 금속의 단위 넓이당 질량의 k배이고, 금속의 단위 넓이당 질량은 1로 잡았다). 모든 단면이 같은 사다리꼴이므로, 액체의 무게중심은 (i)에서처럼 $x = 7$에 있다.

$d = 20$일 때 탱크의 질량은 $1080 + 1800 = 2880$이고, 뒷면에 대한 모멘트는 $7560 + 594 \times 20 = 19440$이다. 액체의 질량은 $10800k$이고 모멘트는 $75600k$이다. 따라서 가득 찬 탱크에 대하여

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

이다(분자와 분모를 720으로 나누었다). 이것이 가득 찬 탱크의 무게중심과 뒷면 사이의 거리이다.

검산

- $k = 0$일 때(액체가 없거나 액체의 밀도(density)를 무시할 수 있을 때) 답은 $\frac{27}{4} = 6.75$이고, 빈 탱크 공식에 $d = 20$을 넣어도 $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$가 나온다.
- $k \to \infty$일 때는 액체가 지배적이 되어 $\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$, 즉 액체 자체의 무게중심이 된다.
- 답은 둘의 가중평균(weighted average)이어야 하므로 항상 6.75와 7 사이에 있다. 예를 들어 $k = 1$이면 $\frac{132}{19} \approx 6.947$이다.
- 수치 검증(사다리꼴의 무게중심을 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 값, $\bar{x} \approx 6.9994$를 주는 몬테카를로(Monte Carlo) 추정, 두 탱크 공식에 대한 정확한 분수 계산)도 모든 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 앞면의 넓이로 $41d$ 대신 $9d$를 쓰는 것. 앞면은 기울어져 있으므로, 그 폭은 비스듬한 길이 XY이다.
- 모멘트가 0이라는 이유로 뒷면을 빼먹는 것. 뒷면은 여전히 전체 질량에 $40d$만큼 기여한다.
- 끝면을 하나만 세거나, 탱크에 뚜껑을 다는 것.

STEP 너머

여기서는 중심을 알고 있는 조각으로 나누어 무게중심을 구했다. 대학에서는 판이나 입체의 무게중심을 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$와 같은 적분(integral)으로 정의하며, "조각으로 나누기" 방법은 영역을 여러 부분으로 자르면 적분이 더해진다는 사실에 지나지 않는다. 같은 적분으로 관성 모멘트(moment of inertia)도 구하는데, 관성 모멘트는 물체가 어떻게 회전하는지를 결정한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 개념을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.