풀이

STEP II 2009, 문제 8

순수수학 • 벡터 기하

STEP II 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q8

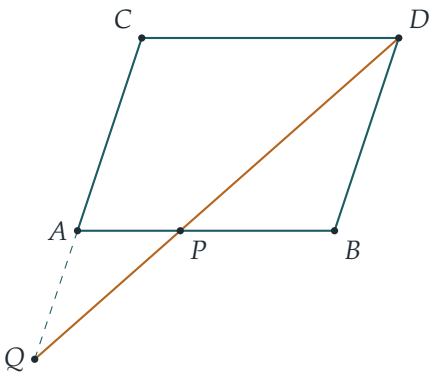
핵심 아이디어

각 정의를 "한 점에서 출발하여 한 변의 몇 배만큼 이동한다"는 꼴로 다시 쓴다. 그러면 $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$이고 $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$이므로 길이 BP와 CQ는 그저 $\lambda\,AB$와 $\mu\,AC$가 되고, 길이 조건은 매우 간단한 방정식으로 바뀐다. 세 점이 한 직선 위에 있음(공선, collinear)을 보이려면, 그 점들을 잇는 벡터(vector) 가운데 두 개가 평행(parallel)함을 보이면 된다.

풀이

그림

$0<\lambda<1$일 때 $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$이므로 점 P는 선분 AB 위, A와 B 사이(양 끝점 제외)에 있다. $\mu>1$일 때 $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$이므로 점 Q는 직선 CA 위에서 A 너머에 있다. 즉 C에서 출발하여 A까지 간 다음 계속 나아간 곳이다. ($\lambda=0.6$으로 그린) 그림에는 아래에서 등장할 점 D도 함께 나타나 있다.



μ 구하기

위에서 다시 쓴 식으로부터

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

이다. 여기서 $\lambda > 0$과 $\mu > 0$을 이용하여 이들을 절댓값 기호 밖으로 꺼냈다. 조건 $CQ \times BP = AB \times AC$는 $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$가 된다. A, B, C는 서로 다른 점이므로 $AB \cdot AC \neq 0$이고, 따라서

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

$0 < \lambda < 1$이므로 이 값은 실제로 $\mu > 1$을 만족한다.

고정점 D

$\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$로 놓는다. $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PD}$를 비교하자. 먼저

$$\begin{aligned}\mathbf{d} - \mathbf{p} &= -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}.\end{aligned}$$

다음으로 $\mu = 1/\lambda$를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathbf{q} - \mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\mathbf{a} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{c} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} - \mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$와 $1 - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$를 이용하였다.

? **생각해 보기** 이 두 벡터가 평행하다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

대괄호 안의 식은 정확히 $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$이다. 따라서

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}), \qquad \text{즉} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

$\lambda \neq 1$이므로 계수는 유한하고, Q는 직선 AB 위에 있지 않으므로 $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$이다. 그러므로 D는 직선 PQ 위에 있다. 벡터 $\mathbf{d}$는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$만으로 이루어져 있으므로, 요구한 대로 모든 λ에 대하여 같은 점이다. 계수 $-\lambda/(1-\lambda)$가 음수이므로, 그림에서처럼 P는 Q와 D 사이에 있다.

사각형 $ABDC$

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \text{이고} \quad \mathbf{d} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a},$$

이므로 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$이고 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$이다. 두 쌍의 대변이 각각 길이가 같고 평행하므로 $ABDC$는 **평행사변형(parallelogram)**이며, D는 A의 맞은편 꼭짓점이다. (A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로 이 평행사변형은 퇴화(degenerate)하지 않는다.)

검산

- 기하학적인 교차 확인: $BD \parallel AC$이므로 삼각형 PAQ와 PBD는 닮음(similar)이고, 따라서 $AQ/BD = AP/BP$이다. 여기서 $AQ = (\mu - 1)AC$, $BD = AC$, $AP = (1-\lambda)AB$, $BP = \lambda AB$이므로 $\mu - 1 = (1-\lambda)/\lambda$를 얻고, 이는 다시 $\mu = 1/\lambda$이다.
- $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (1,3)$, $\lambda = 0.6$(그림의 경우)으로 두면 $P = (1.6,0)$, $Q = (-\frac{2}{3}, -2)$, $D = (5,3)$을 얻는다. QP와 PD의 기울기(gradient)는 모두 $\frac{15}{17}$이다.
- 3차원에서 무작위로 만든 삼각형 20,000개로도 시험하였다. 길이 조건을 μ에 대하여 수치적으로 풀었더니, 모든 경우에 10^{-13} 이내에서 $1/\lambda$와 일치하였고 P, Q, D는 한 직선 위에 있었다.

흔한 실수

- $BP = (1-\lambda)AB$라고 쓰는 것. $\mathbf{p}$에서 $\mathbf{b}$의 계수는 $1-\lambda$이지만, B로부터의 거리를 재는 것은 A에 붙은 가중치이다.
- 꼭짓점의 순서를 확인하지 않고 $ABDC$를 "평행사변형"이라고 부르는 것. 여기서는 $A \to B \to D \to C$ 순서이므로 AD와 BC가 대각선(diagonal)이다.

STEP 너머

$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$처럼 계수의 합이 1인 식을 **아핀 결합**(*affine combination*)이라고 한다. 아핀 결합은 (벡터가 아닌) 점을 다루는 자연스러운 언어이며, 공선성은 아핀 성질이다. 즉 원점을 어떻게 잡든 달라지지 않는다. 이는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)로 이어지고, 직선이 삼각형의 세 변(의 연장선)과 만나는 조건을 정확히 기술하는 메넬라오스(Menelaus) 정리 같은 고전적인 결과로도 이어진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 벡터 쪽을 깊이 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 벡터 기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.