풀이

STEP II 2009, 문제 7

순수수학 • 꼴을 알아보는 적분

> **STEP II 2009, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q7

핵심 아이디어

이런 적분은 피적분함수가 어떤 함수의 도함수와 **정확히** 같다는 사실을 알아차리기 전까지는 손댈 수 없어 보인다. 첫 번째 결과는 $(x-a)^n e^{bx}\sqrt{1+x^2}$의 도함수(derivative)가 어떤 모양인지 알려 준다. 즉 $(x-a)$의 거듭제곱, 지수함수, 삼차식을 곱한 것을 $\sqrt{1+x^2}$로 나눈 꼴이다. 따라서 각 적분은 사실상 짝 맞추기 문제이다. n, a, b를 읽어 내고 삼차식이 일치하는지 확인하면 된다. 분자의 다항식이 삼차식이 아니라 사차식일 때는 늘어난 차수가 어디에서 오는지 알아내야 한다.

풀이

도함수

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$임을 이용하여 세 인수의 곱을 미분한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}e^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n e^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n e^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}e^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\, n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

여기서 공통인수 $(x-a)^{n-1}e^{bx}/\sqrt{1+x^2}$를 묶어 냈다(앞의 두 항은 분자와 분모에 $\sqrt{1+x^2}$를 곱해 공통분모로 맞추었다). 괄호를 전개하면

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

$b \neq 0$이므로 x^3의 계수가 0이 아니고, 따라서 q는 실제로 삼차식이다. 이것이 구하려던 결과이다. 이 결과를 다음 꼴로 사용한다.

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

소문항 (i)

인수를 맞춰 보면 $a = 4$, $b = 4$, $n - 1 = 14$, 즉 $n = 15$이어야 한다. 이 값들을 대입하면

$$q(x) = 4x^3 + (16-16)x^2 + (4-4)x + (15-16) = 4x^3 - 1,$$

이고, 이는 피적분함수에 있는 삼차식과 정확히 같다. 따라서 $(*)$에 의해

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

소문항 (ii)

이번에는 다항식이 사차식이므로 그대로 q가 될 수는 없다.

? 생각해 보기 삼차식만 만들어 내는 공식에 사차식을 어떻게 맞출 수 있을까?

$(*)$에서 $(x-a)$의 지수는 우리가 정할 수 있다. 사차식이 인수 $(x-1)$을 가진다면 이를 옮겨 $(x-1)^{21}$에 합치고 삼차식만 남길 수 있다. $x = 1$을 대입해 보면 $12 - 1 - 11 = 0$이므로 $(x-1)$은 실제로 인수이고, 나누면

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x-1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

(이를 $(x^2-1)(12x^2+11)$로 알아볼 수도 있다.) 따라서 피적분함수는

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$a = 1$, $b = 12$, $n = 23$으로 두면

$$q(x) = 12x^3 + (24-12)x^2 + (12-1)x + (23-12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

이 되어 일치한다. 그러므로

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

소문항 (iii)

이번에도 다항식은 사차식이지만, $x = 2$를 대입하면 $64 + 8 - 2 = 70 \neq 0$이므로 $(x-2)$는 인수가 아니고 (ii)의 기법은 통하지 않는다.

? 생각해 보기 $(x-2)$가 인수가 아니라면, 늘어난 차수는 어디에서 오는 것일까?

차수를 세어 보자. 피적분함수의 분자는 차수가 $6+4=10$이지만, $(x-2)^6$에 대해 $(*)$를 쓰면 차수가 $6+3=9$밖에 되지 않는다. 답에 인수 x가 하나 더 있으면 차수가 하나 올라가므로, $a=2$, $b=4$, $n=7$에 해당하는 함수 y에 대하여 xy를 미분해 본다.

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}, \qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

곱의 미분법(product rule)에 의해 $(xy)'=y+xy'$이다. y도 분모가 $\sqrt{1+x^2}$가 되도록 바꾸어 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

$(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$이므로 괄호 안은

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

로, 정확히 원하는 사차식이다. 그러므로

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

검산

- 각 답을 미분하여 비교한다. 이것이 결정적인 검산이며, 어느 경우든 다시 $(*)$를 쓰는 것일 뿐이다((iii)에서는 곱의 미분법도 함께 쓴다).
- 간단한 차수 세기: (제곱근과 지수함수를 무시하고) 다항식 부분의 차수가 d인 답을 미분하면 분자의 차수는 $d+2$가 된다. (i)에서는 $15+2=14+3$, (ii)에서는 $23+2=21+4$, (iii)에서는 $8+2=6+4$이다.
- 수치적으로, (iii)의 적분을 구간 $[-1,\,1.2]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $-104.41424\ldots$가 나오며, 이는 $F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$에 대한 $F(1.2)-F(-1)$과 유효숫자 약 13자리까지 일치한다. (i)과 (ii)도 마찬가지로 잘 일치한다.

흔한 실수

- n이 피적분함수에 있는 지수보다 1 크다는 것을 잊는 실수. (i)의 답에는 $(x-4)^{14}$가 아니라 $(x-4)^{15}$가 들어간다.

- (ii)에서 인수 $(x-1)$을 먼저 흡수하지 않고 사차식을 그대로 맞추려다가 해가 없다고 결론 내리는 실수.
- 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 "알아보기에 의한 적분(integration by recognition)"이다. 부정적분(antiderivative)의 모양을 추측하고, 그것을 미분한 뒤 계수를 맞춘다. 이를 알고리즘으로 만든 것이 리시 알고리즘(Risch algorithm)으로, 컴퓨터 대수 시스템은 이 알고리즘을 이용해 어떤 초등함수가 초등함수인 부정적분을 가지는지 판정하고, 가진다면 그것을 구한다. 이와 관련된 아이디어, 즉 미지의 계수를 가진 특정한 꼴의 해를 추측하는 방법은 선형 미분방정식(linear differential equation)의 미정계수법(method of undetermined coefficients)이며, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다. STEP 스타일의 적분 문제를 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.