풀이

STEP II 2009, 문제 6

순수수학 • 무한급수의 상계와 하계

> **STEP II 2009, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q6

핵심 아이디어

$\sum 1/F_i$의 값을 정확히 구할 수는 없지만, 그 값을 범위 안에 가둘 수는 있다. 점화식(recurrence)에서 두 가지 간단한 비교를 얻는다. 각 피보나치 수(Fibonacci number)는 바로 앞 항의 두 배보다 작고, 두 칸 앞 항의 두 배보다 크다. 첫 번째 비교로 급수의 꼬리(tail)를 등비급수(geometric series)로 아래에서 누를 수 있다. 두 번째 비교는 꼬리를 자기 자신을 평행이동한 것과 연결해 주며, 이로써 위에서 누를 수 있다. 어느 쪽 부등식을 쓰기 전에 앞의 몇 항을 정확히 더해 두면 원하는 만큼 추정을 정밀하게 할 수 있다.

풀이

연속한 두 항을 차례로 더하면

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

을 얻는다. 모든 F_n은 양수이고 $n \geq 2$일 때 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$이므로, 이 수열은 F_2부터 순증가(strictly increasing)한다.

급수는 수렴한다. $i \geq 4$이면 $i-2 \geq 2$일 때 $F_{i-1} > F_{i-2}$이므로 $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$이다. $F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$, $F_2 = 1 \geq 2^0$이고 $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$이므로, 두 칸씩 나아가는 수학적 귀납법(induction)으로 모든 i에 대해 $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$를 얻는다. 따라서 $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$이고, 공비가 $1/\sqrt{2} < 1$인 등비급수와 비교하면 S는 수렴(converge)한다. 덕분에 아래에서 합을 자유롭게 다룰 수 있다. 또 다음 사실을 여러 번 사용한다. 모든 i에 대해 $a_i \leq b_i$이고 적어도 하나의 i에 대해 $a_i < b_i$이면, 수렴하는 급수에 대해 $\sum a_i < \sum b_i$이다.

소문항 (i)

하한. $i \geq 4$이면 $F_{i-2} < F_{i-1}$이므로

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \geq 4),$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. ($i = 3$에서는 $F_3 = 2F_2$로 등호가 성립하며, 그래서 부등식이 $i = 4$부터 시작한다.)

이를 반복해서 적용하면 $i \geq 4$일 때

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2 F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

이다. $i \geq 4$에 대해 더하면

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

이므로

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

이다.

상한. 이제 다른 비교를 쓴다. 앞에서 얻은 $F_i > 2F_{i-2}$로부터 $i \geq 4$일 때 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$이다. 이를 $i = 5$부터의 모든 항에 적용하고 $j = i - 2$로 놓으면

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

이다. 좌변은 S에서 처음 네 항 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$을 뺀 것이다. 그러므로

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

이다.

? **생각해 보기** 상한을 위한 비교를 왜 $i = 4$가 아니라 $i = 5$부터 시작할까?

$i = 4$부터 시작해도 되지만, 그러면 $S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$, 즉 $S < 4$를 얻어 충분하지 않다. 추정하기 전에 정확히 더해 두는 항이 많을수록 인수 $\frac{1}{2}$로 인한 손실이 줄어든다. 이 생각이 소문항 (ii)를 이끈다.

소문항 (ii)

부분합(partial sum)을 $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$, 꼬리를 $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$로 쓰면 $S = S_{k-1} + T_k$이다. 소문항 (i)에서는 두 가지 일반적인 부등식을 썼으며, 둘 다 $k \geq 3$에서 성립한다.

하한: 앞에서와 똑같이 $i > k$이면 $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$이므로

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{따라서} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

이다.

상한: $i \geq k+2 \geq 5$일 때 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$이므로 $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$이고, $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$이므로

$$T_k < 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right), \qquad \text{따라서} \qquad S < S_{k-1} + 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right).$$

이다. $k = 3$이면 이것이 소문항 (i)의 경계 3과 $3\frac{2}{3}$이다. 이제 두 부등식 모두에서 $k = 5$로 놓는다.

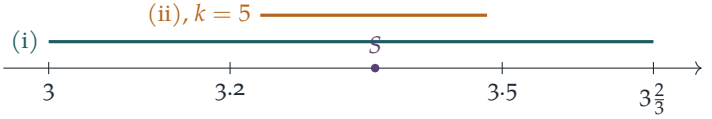
하한의 경우 $S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$이므로

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

이다. 상한의 경우 $S_4 = \frac{17}{6}$이고 $F_5 = 5$, $F_6 = 8$이므로

$$S < \frac{17}{6} + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

이다. 두 결과를 합치면 요구한 대로 $3.2 < S < 3.5$를 얻는다. ($k = 4$로는 부족하다. 그러면 $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$, 즉 대략 $3.17 < S < 3.57$밖에 얻지 못한다.)



검산

- 처음 200개 항을 수치적으로 더하면 $S \approx 3.35989$이다. 이 값은 두 구간 안에 모두 들어 있으며, $k = 3, \ldots, 6$에 대한 경계도 모두 이 값을 감싼다: $3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$.
- 실제 값으로 비교를 확인해 보자: $F_7 = 13 < 2 \times 8$이고 $13 > 2 \times 5$이다.

흔한 실수

- 등호가 성립하는 $i = 3$에서 $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$을 쓰는 것. 그러면 엄격한 부등호가 깨지거나 잘못된 등비급수의 합이 나온다.

- 급수가 수렴한다는 것을 먼저 알지 못한 채 S를 수처럼 다루는 것("$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$").
- $i = 4$부터 시작한 비교로는 $S < 4$밖에 얻지 못한다고 상한을 포기하는 것. 추정하기 전에 더 많은 항을 정확히 더하라.

STEP 너머

이 값 $S \approx 3.3598856\ldots$를 **피보나치 역수 상수**(reciprocal Fibonacci constant)라 한다. 이 수는 무리수(irrational)임이 알려져 있지만(André-Jeannin의 1989년 결과), 닫힌 꼴(closed form)은 알려져 있지 않다. 여기서 쓴 비교는 사실 비판정법(ratio test)이 모습을 바꾼 것이다. F_{i+1}/F_i는 황금비(golden ratio) $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$로 수렴하므로, 꼬리는 공비가 $1/\varphi \approx 0.618$인 등비급수처럼 행동하며, 이 값은 우리가 쓴 거친 비율 $\frac{1}{2}$과 $1/\sqrt{2}$ 사이에 있다. 이와 같은 비교판정법(comparison test)과 꼬리 추정은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 핵심이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 제대로 만나기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.