풀이

STEP II 2009, 문제 5

순수수학 • 중첩 제곱근

STEP II 2009, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q5

핵심 아이디어

처음의 전개가 사실상 문제 전체이다. 이 전개는 $x+2\sqrt{x-1}$이 완전제곱식(perfect square)임을 알려 주고, 같은 방법으로 $x-2\sqrt{x-1}$도 완전제곱식임을 보일 수 있다. 겹친 근호를 풀어내고 나면 모든 피적분함수(integrand)가 기본적인 꼴로 간단해진다. 한 가지 주의할 점은 $\sqrt{a^2}=|a|$이지 a가 아니라는 것이다. 따라서 부호를 계속 추적해야 하며, 바로 이 점이 소문항 (ii)를 흥미롭게 만든다.

풀이

전개

$x\geq 1$일 때,

$$(\sqrt{x-1}+1)^2=(x-1)+2\sqrt{x-1}+1=x+2\sqrt{x-1}.$$

같은 방법으로 $(\sqrt{x-1}-1)^2=x-2\sqrt{x-1}$이다. 음이 아닌 제곱근을 취하고 $\sqrt{a^2}=|a|$임을 기억하면,

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+1,\qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|.$$

첫 번째 식은 $\sqrt{x-1}+1>0$이므로 절댓값(modulus)이 필요 없다. 두 번째 식은 절댓값이 필요하다. $\sqrt{x-1}-1$은 $1\leq x<2$에서 음수이고 $x\geq 2$에서 음이 아니기 때문이다.

소문항 (i)

$[5,10]$에서 $\sqrt{x-1}\geq 2>1$이므로 $|\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}-1$이다. 따라서 분자는

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1)=2\sqrt{x-1},$$

이고, 피적분함수는 단순히 2이다. 그러므로

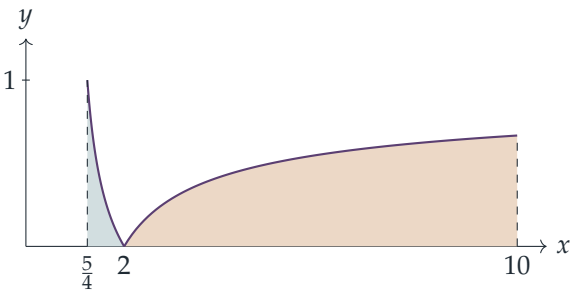
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

소문항 (ii)

위의 전개에 의해

$$y = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

따라서 전 구간에서 $y \geq 0$이고, 곡선은 $\sqrt{x-1}=1$이 되는 $x=2$에서 x축에 접한다.



생각해 보기 왜 그냥 근호를 없애고 전체 구간에서 $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$을 적분하면 안 되는가?

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$은 결코 음수가 아니지만, $\sqrt{x-1}-1$은 $x<2$에서 음수이기 때문이다. 절댓값을 무시하면 $[\frac{5}{4},2]$ 위의 부분을 음의 넓이로 계산하게 된다. 그래서 $x=2$에서 구간을 나눈다.

$[\frac{5}{4},2]$에서는 $\sqrt{x-1}\leq 1$이므로 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$이고,

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-(1-\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{4}.$$

$[2,10]$에서는 $\sqrt{x-1}\geq 1$이므로 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$이고,

$$\int_{2}^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_{2}^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

따라서 전체 넓이는 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$이다.

소문항 (iii)

분자의 두 번째 근호는 모양이 다르지만, $x-1$ 대신 $x+1$을 쓰면 같은 방법이 통한다.

$$(\sqrt{x+1}-1)^2 = (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - 2\sqrt{x+1} + 2.$$

$x \geq \frac{5}{4}$이면 $\sqrt{x+1} > 1$이므로 $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$이고, 절댓값이 필요 없다. ($\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$로 쓰면($x>1$에서 두 인수가 모두 양수이므로 성립한다), 피적분함수는

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

가 된다. 두 ± 1 항이 상쇄되는데, 이것이 분자가 다소 이상해 보이는 이유이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}\right]_{5/4}^{10} \\ &= (2\sqrt{11}+6) - (3+1) \\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

이다. 여기서 아래끝에서는 $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$와 $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$를 이용하였다.

검산

- $x=5$에서 $\sqrt{5+4}=3$, $\sqrt{5-4}=1$이므로 (i)의 피적분함수는 $(3+1)/2 = 2$이고, 주장한 대로이다.
- (ii)에서 $x=\frac{5}{4}$일 때 곡선의 높이는 $|1-2|=1$이고 $x=10$일 때 높이는 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 그림과 일치한다. 첫 번째 부분은 넓이가 $\frac{1}{4}$인 가느다란 조각으로, 그럴듯하다.
- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 10.000, 4.250, 8.6332를 얻으며, 이는 10, $\frac{17}{4}$, $2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$와 일치한다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$이라고 쓰는 것. 그러면 (ii)에서 $\frac{17}{4}$ 대신 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$를 얻게 된다.
- (iii)에서 $x-2\sqrt{x+1}+2$도 완전제곱식임을 알아차리지 못하고 대신 치환을 시도하는 것.

STEP 너머

항등식 $\sqrt{a^2} = |a|$은 해석학(analysis)의 큰 주제를 보여 주는 작은 예이다. 식으로 정의된 함수는 꺾인 점이나 부호의 변화를 숨기고 있을 수 있으므로, 적분하기 전에 식의 부호가 어디에서 바뀌는지 살펴보아야 한다. 또한 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$과 같은 이중근호를 푸는 일(denesting radicals)에는 놀라울 만큼 깊은 대수적 이론이 있으며, 이는 체의 확대(field extensions)와 연결된다. 해석학 쪽으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.