풀이

STEP II 2009, 문제 4

순수수학 • 다항식의 나누어떨어짐

> **STEP II 2009, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q4

핵심 아이디어

$(x-1)^5$로 나누어떨어진다는 조건은 식으로 직접 써 두는 것이 가장 다루기 쉽다. 즉 어떤 다항식(polynomial) q에 대하여 $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$ 로 쓴다. 이를 미분하면 $\mathrm{p}(x) - 1$의 중복된 인수가 차수가 하나 낮아진 채로 $\mathrm{p}'(x)$에 남아 있음을 알 수 있다. 마지막 소문항에서는 이 사실 덕분에 p'이 거의 완전히 결정되므로, 미지의 계수 열 개와 씨름하는 대신 p'을 적분하여 p를 구한다.

풀이

$\mathrm{p}(x) - 1$은 $(x-1)^5$로 나누어떨어지고 차수(degree)가 9이므로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

여기서 q는 차수가 4인 다항식이다.

소문항 (i)

$x = 1$을 대입하면 둘째 항이 사라지므로

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x)\\ &= (x-1)^4(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)).\end{aligned}$$

괄호 안은 다항식이므로, 요구한 대로 $\mathrm{p}'(x)$는 $(x-1)^4$로 나누어떨어진다.

소문항 (iii)

$x-1$ 대신 $x+1$을 써서 똑같은 논증을 적용할 수 있다. $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$로 쓰면 $\mathrm{p}(-1) = -1$을 얻고, $\mathrm{p}'(x)$가 $(x+1)^4$로 나누어떨어짐을 알 수 있다.

따라서 $\mathrm{p}'(x)$는 $(x-1)^4$와 $(x+1)^4$ 모두로 나누어떨어진다.

> **생각해 보기** 왜 이로부터 $\mathrm{p}'(x)$가 곱 $(x-1)^4(x+1)^4$로 나누어떨어진다고 할 수 있을까?

$\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$로 쓰자. $(x+1)^4$의 근(root)은 모두 -1이고, 이는 $(x-1)^4$의 근이 아니므로 인수 $(x+1)^4$는 $\mathrm{s}(x)$를 나누어야 한다. (같은 말이지만, 일차 인수 $x+1$은 p'에 네 번 나타나고, 그중 어느 것도 $(x-1)^4$에 흡수될 수 없다.) 따라서 $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$은 $\mathrm{p}'(x)$를 나눈다.

이제 p'의 차수는 8로 $(x^2-1)^4$의 차수와 같으므로, 몫은 0이 아닌 상수이다.

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

적분하면

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

F는 기함수(odd function)이므로 $\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$임에 주목하자. 알고 있는 두 값으로부터

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

두 식을 더하면 $c = 0$이고, 빼면 $k\mathrm{F}(1) = 1$이다. 공통분모 315로 통분하면

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

그러므로

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

지금까지는 조건을 만족하는 p라면 반드시 이 꼴이어야 함을 보였을 뿐이므로, 이 다항식이 실제로 조건을 만족하는지도 확인해야 한다. 이 다항식의 차수는 9이다. 또한 $\mathrm{p}(1) - 1 = 0$이고 $\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$이므로, $\mathrm{p}(x) - 1$의 처음 네 도함수(derivative)는 모두 $x = 1$에서 0이 된다. 따라서 $x = 1$은 $\mathrm{p}(x) - 1$의 중복도(multiplicity)가 적어도 5인 근이고, 즉 $(x-1)^5$는 $\mathrm{p}(x) - 1$을 나눈다. p는 기함수이므로 $\mathrm{p}(x) + 1 = -(\mathrm{p}(-x) - 1)$이고, 이는 $(-x-1)^5 = -(x+1)^5$로 나누어떨어진다. 따라서 두 조건이 모두 성립하며, 이 p가 유일한 답이다.

검산

- 계수 $35, -180, 378, -420, 315$의 합은 128이므로 $\mathrm{p}(1) = 1$이 확인된다.
- $\mathrm{p}(x) - 1$을 정확한 분수 계산으로 $x - 1$로 거듭 나누면 나머지가 정확히 다섯 번 영이 되고, $\mathrm{p}(x) + 1$을 $x + 1$로 나누어도 마찬가지이다.
- p는 당연히 기함수이다. p가 조건을 만족하면 $-\mathrm{p}(-x)$도 조건을 만족하는데, 답은 유일하기 때문이다.

흔한 실수

- 열 개의 연립방정식으로부터 p의 계수 열 개를 모두 직접 구하려는 것. 원리적으로는 가능하지만, p′을 적분하는 편이 훨씬 빠르다.
- 적분상수를 빠뜨리거나, 적분상수와 k를 정할 때 $\mathrm{p}(1) = 1$과 $\mathrm{p}(-1) = -1$을 모두 쓰지 않는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 배경에 있는 사실은, a가 f의 m중근일 필요충분조건이 $\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}'(a) = \cdots = \mathrm{f}^{(m-1)}(a) = 0$이라는 것이다. 이처럼 여러 점에서 함숫값과 도함숫값을 지정하는 것을 **에르미트 보간법**(*Hermite interpolation*)이라 하며, 여기서 구한 다항식은 "스무스스텝(smoothstep)" 곡선으로, 양 끝에서 가능한 한 평평하게 -1에서 1까지 올라가며 컴퓨터 그래픽스에서 쓰인다. 서로소인 인수들이 곱을 나눈다는 논증은 환론(ring theory)의 한 부분이다. 체(field) 위의 다항식은 정수와 마찬가지로 유일 인수분해(unique factorisation)를 가진다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.